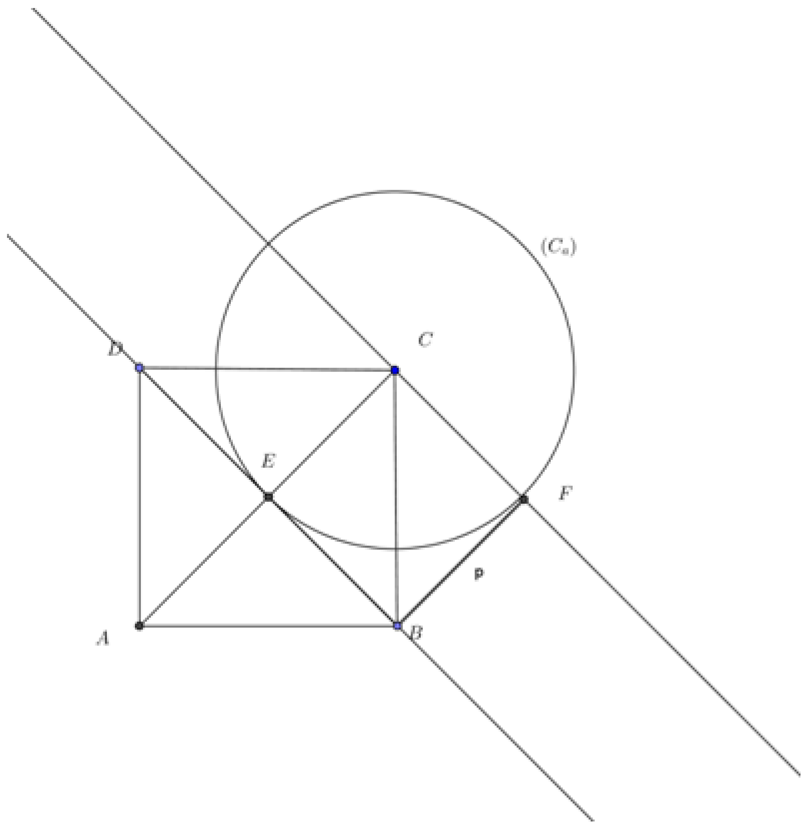
Corrigé problème 1 Bacc série C 2023

Problème 1 (7 points)



I)1-Détermination de α ; β et γ tel que $C = bar\{(A;\alpha);(B;\beta);(D;\gamma)\}$

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

D'où $\alpha = -1; \beta = 1$ et $\gamma = 1$

2-a) Détermination et construction de l'ensemble (C_a)

$$C_a = \left\{ M \in P / -MA^2 + MB^2 + MD^2 = \frac{a^2}{2} \right\}$$

Comme $C = bar\{(A;\alpha);(B;\beta);(D;\gamma)\}$ alors $-MA^2 + MB^2 + MD^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow MC^2 = \frac{a^2}{2}$

Donc $MC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, alors (C_a) est un cercle de centre C et de rayon $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Montrons que $E \in (C_a)$

$$EA^2 + EB^2 + ED^2 = -\frac{AC^2}{4} + \frac{AC^2}{4} + \frac{AC^2}{4} = \frac{AC^2}{4} = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

Par suite $E \in (C_a)$

Autre méthode :

Comme ABCD est un carré de côté a alors $AC = a\sqrt{2}$ et $CE = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = R$ d'où $E \in (C_a)$

3 - En décomposition r en deux réflexions, montrons que $f = S_{(AC)} \circ t_{2\overrightarrow{EC}} = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{CA}}$

$f = r \circ S$ avec $r = R(E;\pi)$ et $S = S_{(FC)}$

$r = R(E;\pi) = S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}$ avec $\begin{cases}(D_1) \cap (D_2) = E \\ ((D_1);(D_2)) = \frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$, d'où $r = S_{(AC)} \circ S_{(DB)}$ et

$\begin{cases}(AC) \cap (DB) = E \\ ((AC);(DB)) = \frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

$f = r \circ S = r \circ S_{(FC)} = S_{(AC)} \circ S_{(DB)} \circ S_{(FC)}$ or $(BD)//(FC)$ donc $S_{(DB)} \circ S_{(FC)} = t_{\overrightarrow{2CE}}$ alors

$f = S_{(AC)} \circ S_{(DB)} \circ S_{(FC)} = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{2CE}}$ or $2\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA}$ par suite $f = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{CA}}$

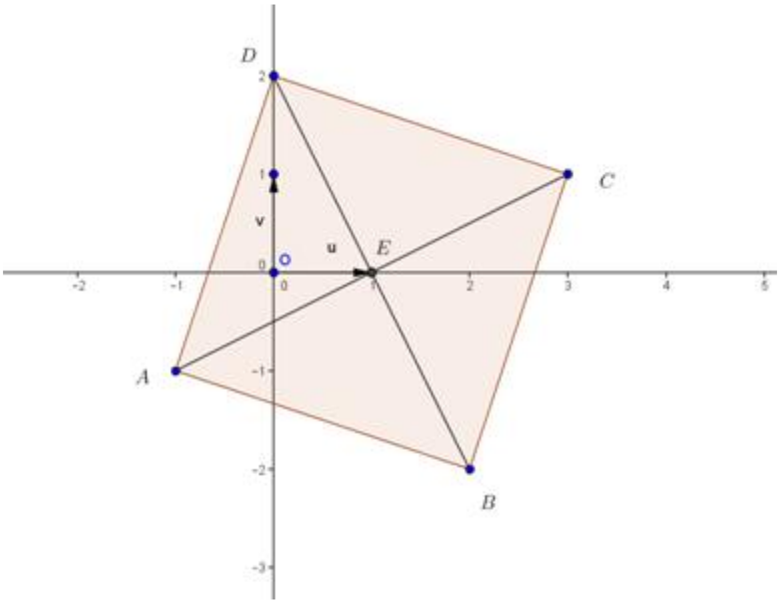
Conclusion : $f = S_{(AC)} \circ t_{2\overrightarrow{EC}} = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{CA}}$

b- Déduction de la nature et les éléments caractéristiques de f

Comme (AC) est la droite dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AC}$, f est une symétrie glissée de droite (AC) et de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

II) Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, d'unité 1cm.

A et B sont deux points de (P) d'affixes respectives $-1-i$ et $2-2i$



2-a) Écriture complexe de r : rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

$$r : z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z + (1 - e^{i\frac{\pi}{2}}) z_A$$

Donc l'expression complexe de r est $z' = iz - 2$

Affixe de D : $r(D) = B$ ce qui équivaut à $z_D = iz_B - 2 = 2i$

b- Affixe de C :

1ère méthode

$-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow z_C - z_A + z_B - z_C - + z_D - z_C = 0$; d'où $z_C = 3 + i$

2ème méthode :

Comme $C = bar\{(A;-1);(B;1);(D;1)\}$, on a : $z_C = \dfrac{-z_A + z_B + z_D}{-1+1+1} = \dfrac{-(-1-i)+1(2-2i)+1(2i)}{1} = 3 + i$

c- Deux applications affines qui laissent invariant le carré ABCD :

L'identité du plan et la symétrie centrale par rapport à E ; car :

$I_d(ABCD) = I_d(A)I_d(B)I_d(C)I_d(D) = ABCD$;

$S_E = r(E;\pi)$, donc $S_E(A) = C; S_E(C) = A$ et $S_E(B) = D; S_E(D) = B$

d- Affixe de E milieu de $[AC]$

$$z_E = \frac{1}{2}(z_A + z_C) = 1$$

3-Soit g la transformation d'écriture complexe : $g : z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1}\right)\bar{z} + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

a-Écriture complexe de $g \circ g$

$$g \circ g : z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1}\right)\left(\overline{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1}\right)\bar{z} + \frac{\sqrt{3}+i}{2}}\right) + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$g \circ g : z' = z + \sqrt{3} + i$, d'où $g \circ g = t_{2\vec{u}}$

$g \circ g$ est une symétrie glissée de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$, d'axe (Δ) et de vecteur directeur $\vec{u}$

$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z' = z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$; et $M' = g(M) \Leftrightarrow z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1}\right)\bar{z} + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

Donc $(\Delta) : x\sqrt{3} - 3y = 0$