Logarithme ou exponentielle et équations de degré 2

1. Logarithme et équation de degré 2

1.1 Méthode

Pour résoudre une équation du type a (ln x)² + b ln x +c =0, on effectue le changement de variable u = ln x et on obtient une équation du second degré en u qu'on peut résoudre facilement.

1.2 Exemple :

1.2.1 Énoncé

1- résoudre dans IR l'équation $x^2 + x - 6 = 0$.

2- En déduire la résolution de l'équation $(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$

1.2.2 Réponse

1- résolution de $x^2 + x - 6 = 0$

a = 1, b = 1 , c = - 6 . $\Delta = b^2 - 4ac = 25$.

on a $x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-5}{2} = -3$ et $x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+5}{2} = 2$

2- déduction

posons u = ln x, on a $u^2 + u - 6 = 0$, alors u = -3 ou u = 2

si u = -3 , ln x = -3 =>x = e^{-3} et si u = 2, ln x = 2 => u = e^2.

L'ensemble des solutions est S = { e^{-3} ; e^2 }.

2. Exponentielle et équation du second degré

2.1 méthode

Pour résoudre un équation de la forme a e² + b e + c = 0, on pose u = e² et on obtient une équation de la forme $a u^2 + b u + c = 0$ qu'on peut résoudre facilement.

2.2 Exemple

2.2.1 Énoncé

1- Résoudre dans IR l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$

2- En déduire la résolution de l'équation $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$

2.2.2 Réponse

1- Ici a = 1 , b = 2, c = -3, alors $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4*1*(-3) = 16$;

$$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-4}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+4}{2} = 1$$

2- En posant u = e^x, l'équation devient $u^2 + 2u - 3 = 0$, et on a u = - 3 ou u = 1.

si u = -3, $e^x = -3$ impossible.

Si u = 1, $e^x = 1$, donc x = ln 1 = 0 ? On a S = { 0 }