Corrigé exercice 1 Bacc série A 2023

Exercice 1 (5 points)

(U_n) est la suite géométrique à termes positif décroissante telle que $\begin{cases} U_0+U_2=10 \\ U_0 \times U_2=16 \end{cases}$

1- a) $\begin{cases} U_0+U_2=10 (L_1) \\ U_0 \times U_2=16 (L_2) \end{cases}$

L'équation (L_1) donne $U_0 = 10 - U_2$.

L'équation (L_2) devient $(10-U_2)U_2=16$.

Ce qui donne, en développant $10.U_2-U_2^2=16$

ou $10.U_2-U_2^2-16=0$.

En multipliant par -1, on a $U_2^2-10.U_2+16=0$.

Résolvons cette équation où l'inconnue est U_2

Le discriminant est $\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4.1.(16)$

$\Delta=36=6^2$.

On a deux solutions $U_2=\frac{-(b)-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10-6}{2.1}=2$ et $U_2=\frac{-(b)+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10+6}{2.1}=8$

- Si $U_2=2$ alors $U_0 = 10 - U_2 = 10 - 2 = 8$.
- Si $U_2=8$, alors $U_0 = 10 - U_2 = 10 - 8 = 2$.

(U_n) est décroissante, donc $U_0 > U_2$. Ainsi $U_0=8$ et $U_2=2$

b) (U_n) est une suite géométrique donc $U_2=q^2 \cdot U_0$. Alors $q^2=\frac{U_2}{U_0}=\frac{2}{8}$

Alors $q^2=\frac{1}{4}$ d'où $q=\frac{1}{2}$ ou $q=-\frac{1}{2}$

La suite est à termes positifs, donc $q=\frac{1}{2}$.

2.- a) $U_0=8$ et $q=\frac{1}{2}$, $U_n=q^n \cdot U_0$, donc $U_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 8$

b) $S_n=U_0+U_1+...+U_n$

$$S_n=U_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$S_n=8\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

Ainsi $S_n=16[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}]$

3.- (V_n) est la suite définie par d'où $V_n = 1 + \ln(U_n)$.

a) $V_n = 1 + \ln(U_n)$ donc $V_{n+1} = 1 + \ln(U_{n+1}) = 1 + \ln(8.\left(\frac{1}{2}\right)^n)$

$V_{n+1} - V_n = 1 + \ln(U_{n+1}) - (1 + \ln(U_n))$

$V_{n+1} - V_n = \ln(U_{n+1}) - \ln(U_n) = \ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)$

(U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, donc $U_{n+1} = q.U_n = \frac{1}{2}.U_n$.

Ainsi $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q = \frac{1}{2}$

Par conséquent $V_{n+1} - V_n = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2$.

Ainsi, la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison r = - ln 2.

Son premier terme est $V_0 = 1 + \ln(U_0) = 1 + \ln 8 = 1 + \ln(2^3)$

$V_0 = 1 + 3\ln 2$

b) $V_n = V_0 + n.r = 1 + 3.\ln 2 + n(-\ln 2)$

Ainsi $V_n = 1 - (n-3).\ln 2$