VECTEURS DU PLAN ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1. RAPPELS SUR LES VECTEURS

1.1 Bipoints équipollents

Deux bipoints (A, B) et (A', B') sont équipollents si le quadrilatère ABB'A' est un parallélogramme.

Caractérisation : (A, B) et (A', B') sont équipollents si (A, B') et (A', B) ont même milieu.

1.2 Vecteurs

1.2.1 Définitions :

On appelle vecteur $\vec{AB}$ du plan l'ensemble des bipoints équipollents à (A, B).

Tout bipoint équipollent à (A,B) est un représentant du vecteur $\vec{AB}$.

La direction de $\vec{AB}$ est la droite (AB), son sens de A vers B, et sa norme $\|\vec{AB}\|=d(A,B)=AB$.

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Si $\|\vec{AB}\|=d(A,B)=0$, $\vec{AB}$ est le vecteur nul et on écrit $\vec{AB}=\vec{0}$. On a ce cas lorsque A e B sont confondus.

Un vecteur unitaire est un vecteur dont la norme est égale à 1.

Si A, B, C et D ne sont pas alignés, ABCD est un parallélogramme si $\vec{AB}=\vec{DC}$.

1.2.2 Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction.

Théorème :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$

Théorème
Soit $\vec{u}$ un vecteur donné.
Pour tout point A, il existe un point unique M tel que $\vec{AM}=\vec{u}$.

1.3 Produit scalaire

1.3.1 Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel $\vec{u}.\vec{v}$ défini par $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$. (forme géométrique)

Et dans un repère orthonormé, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}.\vec{v}=x.x'+y.y'$ (Forme analytique)

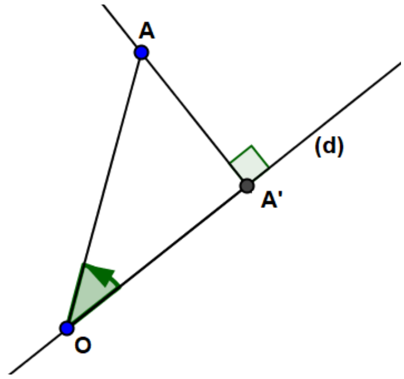
1.3.2 Propriétés

- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ (On dit que le produit scalaire est commutatif)
- $\vec{0}.\vec{u}=\vec{u}.\vec{0}=0$.
- $(k.\vec{u}).\vec{v}=k(\vec{u}.\vec{v})$

- $\vec{u} \cdot (\vec{v}+\vec{w})=\vec{u} \cdot \vec{v}+\vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v}=0$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

1.3.3 Applications :

a) Projection orthogonale



Soit A un point du plan, et (D) une droite.

La projection de A sur (D) est le point A' de (D) tel que (AA') soit orthogonale à (D).

C'est le point de D le plus proche de A.

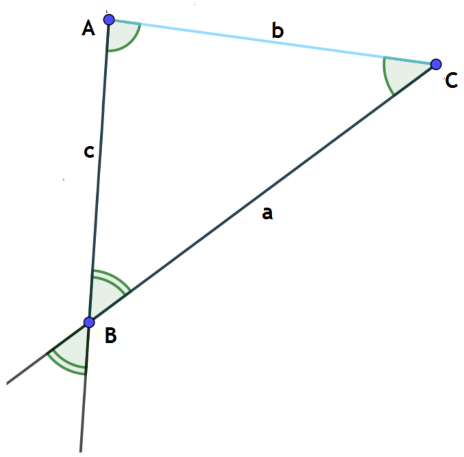
La distance de A à (D) est d(A,A').

Si on considère le triangle OA'A qui est triangle en A' , on a :

$$\cos(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OA})=\frac{OA'}{OA}.$$

D'où $OA'=OA\cos(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OA})$

b) Relation entre les côtés d'un triangle quelconque



ABC est un triangle quelconque, AB = c, BC = a et AC = b

D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

Donc

$$\vec{BC}^2=(\vec{AC}-\vec{AB})=\vec{AC}^2+\vec{AB}^2-2.\vec{AC}.\vec{AB}$$

$$\vec{AC}.\vec{AB}=AC.AB.\cos(\vec{AC};\vec{AB})$$

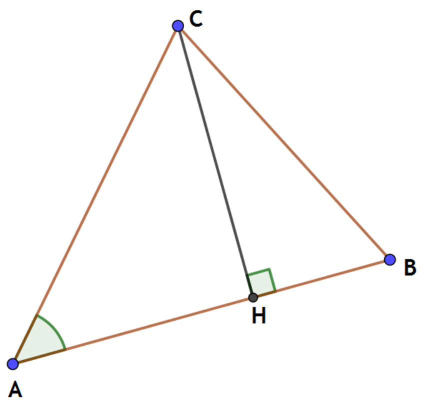
Comme $\cos(\vec{AC};\vec{AB})=\cos\hat{A}$ on a $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos\hat{A}$

Remarques

- Lorsque le triangle est rectangle en A : cos A = 0, on retrouve le théorème de Pythagore.

- De même, on a, pour les deux autres côtés, $b^2=a^2+c^2-2ac.\cos\hat{B}$ et $c^2=a^2+b^2-2ab.\cos\hat{C}$

- L'aire d'un triangle ABC est égale à $S=\frac{1}{2}AB.HC$ où H est la projection de C sur la droite (AB).



Donc $S=\frac{1}{2}bc \cdot \sin\hat{A}$

De même , $S=\frac{1}{2}ac \cdot \sin\hat{B}$ et $S=\frac{1}{2}ab \cdot \sin\hat{C}$.

D'où $2S=ac \cdot \sin\hat{B}=ab \cdot \sin\hat{C}=bc.\sin\hat{A}$.

En divisant par abc, on a : $\frac{2S}{abc}=\frac{\sin\hat{A}}{a}=\frac{\sin\hat{B}}{b}=\frac{\sin\hat{C}}{c}$,

et en passant à l'inverse, $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$

c) Équation d'une droite

Étant donné un point A(x_0, y_0), un point M(x,y) appartient à la droite D passant par A et dont un vecteur normal est $\vec{u}\,(a\ ;\ b\ )$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\ et\ \vec{u}$ sont orthogonaux, donc si et seulement si $\overrightarrow{AM}\,.\,\vec{u}=0$.

Cette égalité donne l'équation cartésienne de la droite D.

Exemple :

Donner l'équation de la droite D passant par la point A (1; 0) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Un point M (x ; y) appartient à D si et seulement si $\overrightarrow{AM}\,.\,\vec{u}=0$, donc si et seulement si
(x-1). 1 + (y-0) . 2 = 0
Ce qui donne l'équation de la droite : x + 2y -1 = 0.

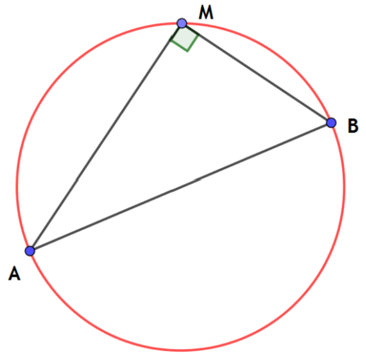
d) Équation d'un cercle :

Cercle de centre donné

Un point M(x;y) appartient au cercle de centre A (a,b) et de rayon R si AM = R

Comme $AM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, on a l'équation cartésienne du cercle de centre A(a,b) et de rayon R :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

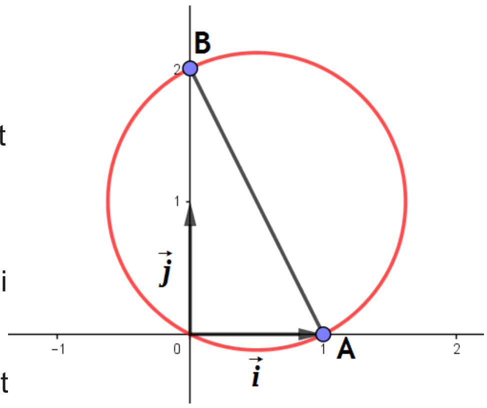


Cercle de diamètre donné

Considérons un cercle de diamètre [AB].

Si M est un point de ce cercle distinct de A et de B, alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}\ et\ \overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux. Donc $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BM}=0$.

Cette égalité donne une équation cartésienne du cercle de diamètre [AB].



Exemple :

Donner une équation du cercle de diamètre [AB] où A (1 ; 0) et B(0 ; 2).

Un point M(x ; y) appartient à ce cercle si et seulement si $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BM}=0$

Comme les coordonnées des vecteur $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont respectivement (x-1 ; y) et (x ; y-2), cette égalité s'écrit (x-1).x+y.(y-2) = 0.

Ce qui donne, en développant : $x^2+y^2-x-2y=0$: c'est l'équation du cercle.

- Le centre de ce cercle est le point $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$ et son rayon est $r=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{2^2+1^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

On peut retrouver l'équation en utilisant la première méthode :

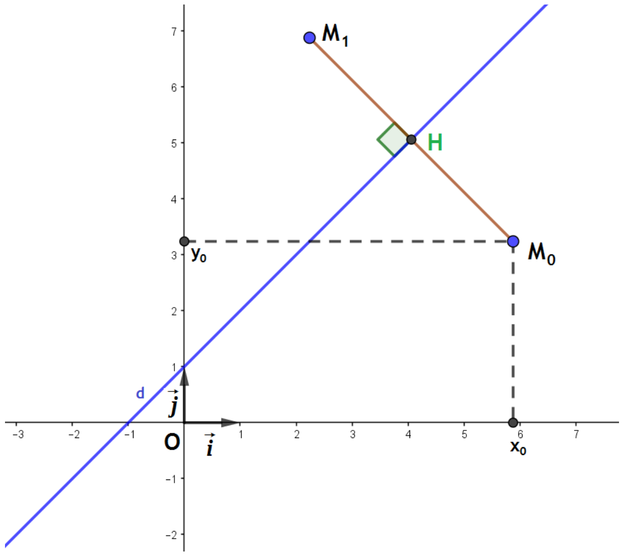
Un point M(x ;y) appartient à ce cercle si et seulement si AM = r, donc si et seulement si $\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(y-1)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ou $(x-\frac{1}{2})^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$

e) Distance d'un point à une droite d'équation donnée

On considère une droite d d'équation ax + by +c = 0 et un point $M_0(x_0\,;y_0)$ n'appartenant pas à d.

Notons H le projeté orthogonal de M_0 sur d.

La distance de M_0 à d est la distance de M_o à H



Le vecteur $\vec{u}\,(a\;;\;b)$ est normal à d.

Le point M_1 défini par $\overrightarrow{M_0M_1}=\vec{u}$ est tel

que $M_0M_1=\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Si x_H et y_H sont les coordonnées de H,

on a, puisque H appartient à d, $ax_H+by_H=c$.

D'une part , $\overrightarrow{M_0M_1}$ et $\overrightarrow{M_0H}$ ont respectivement

comme coordonnées $(a;b)$ et $(x_H-x_0;y_H-y_0)$

Donc $\overrightarrow{M_0M_1}.\overrightarrow{M_0H}=a(x_H-x_0)+b(y_H-y_0)$,

Ou $\overrightarrow{M_0M_1}.\overrightarrow{M_0H}=-(ax_0+by_0+c)$.

D'autre part $\overrightarrow{M_0M_1}.\overrightarrow{M_0H}=M_0M_1.M_0H.\cos(\overrightarrow{M_0M_1},\overrightarrow{M_0H})$

D'où $M_0M_1.M_0H.\cos(\overrightarrow{M_0M_1},\overrightarrow{M_0H})=-(ax_0+by_0+c)$

$$M_0H=\frac{-(ax_0+by_0+c)}{M_0M_1\,.\,\cos(\overrightarrow{M_0M_1},\,M_0H)}$$

Ainsi la distance de M_0 à d est $M_0H=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}\,.\,\cos(\overrightarrow{M_0M_1},\,\overrightarrow{M_0H})}$