Séquence 4: Application des nombres complexes

1. Application à la trigonométrie

1.1 Propriétés de l'argument

Pour tout complexe non nul z et z' , on a :

- arg (zz') = arg(z) + arg(z') + k .2π , $k \in \mathbb{Z}$
- arg($\frac{z}{z'}$) = arg(z) – arg(z') + k .2π , $k \in \mathbb{Z}$
- arg (z^n) = n arg (z) + k .2π , $k \in \mathbb{Z}$
- Argument d'une différence

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B. On note M le point tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire $z_B - z_A$.

. On a arg ($z_B - z_A$) = $\widehat{(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB})}$

Soit z = r (cos θ + i sin θ) et z' = r' (cos θ' + i sin θ')

zz' = rr'(cos θ cos θ' - sin θ sin θ' + i (sin θ cos θ' + cos θ sin θ')

= rr' (cos $\theta + \theta'$) + sin($\theta + \theta'$))

comme z' • $\frac{1}{z'}$ = 1 , 0 étant un argument de 1, on obtient arg(z') + arg($\frac{1}{z'}$) = 0 + k .2π , $k \in \mathbb{Z}$

d'où arg ($\frac{1}{z'}$) = - arg(z) + k .2π , $k \in \mathbb{Z}$, et $\frac{z}{z'}$ = z • $\frac{1}{z'}$

1.2 Formule de Moivre

Pour tout entier relatif n et pour tout nombre réel θ , on a :

(cos θ + i sin θ $)^n$ = cos $n\theta$ + i sin $n\theta$

Exemple

(cos $\frac{\pi}{6}$ + i sin $\frac{\pi}{6}$ $)^3$ = (cos3. $\frac{\pi}{6}$ + i sin 3. $\frac{\pi}{6}$) = (cos $\frac{\pi}{2}$ + i sin π) = 1

1.3 Utilisations de la formule d'Euler

1.3.1 Démonstration des formules de transformations

La transformation d'un produit en somme, ou d'une somme en produit est très simple avec la formule d'Euler.

Par exemple, cosa cosb = ($\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}$) ($\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}$)

Quand on verra les propriétés de la fonction exponentielle, on montrera que :

cosa cosb = $\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$

1.3.2 Transformation de a cos x + b sin x

Soit z = a + i b et r = |z|, θ = arg (z), alors a =r cos θ et b = r sin θ

et a cos x + b sin x = r (cos θ cos x + sin θ sin x) = r cos (x - θ)

1.3.3 Linéarisation

Pour linéariser (cos θ)n et (sin θ)n, on utilise la formule d'Euler et la formule du binôme.

2. Applications à la Géométrie

2.1 Ensemble de points

Il s'agit de déterminer un ensemble E de points M qui vérifient une propriété avec l'affixe de M

$| z - z_A |$ = r avec r > 0 si et seulement si AM = r

E est le cercle de centre A et de rayon r

| z – z A | = | z – z A | si et seulement si AM = BM

E est la médiatrice du segment [AB]

2.2 Interprétation géométrique de arg ($\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$)

Soient A, B ,C trois points distincts d'affixes z_A, z_B, z_C. arg ($\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$) est une mesure

de l'angle ($\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}$)

A, B, C sont alignés si et seulement si $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ est un nombre réel.

A, B, C sont alignés si et seulement si $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ est un nombre imaginaire pur.