Séquences 3 : Equations complexes

1. Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

1.1 Racine carrée dans $\mathbb{C}$

1.1.1 Définition

Soit Z un nombre complexe . On dit que z est une racine carrée de Z si z² = Z.

Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.

1.1.2 Détermination

Posons Z = a + ib et z = x +iy. z²= Z si et seulement si (x + iy)² = a +ib, qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Exemple

Calculer les racines carrées de z = 3 - 4 i.

Les racines carrées de 3 – 4 i se calculent par le biais du système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} & (1) \\ x^2 - y^2 = 3 & (2) \\ 2xy = -4 & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) donne 2x² = 8 , ce qui donne x = -2 ou x = 2. (3) donne y = $\frac{-4}{(2x)}$, c'est à dire y= 1 ou y = -1.

Les racines carrées de z sont : -2 + i et 2 – i.

1.2 Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit (E) l'équation a z² + b z + c = 0 où a, b, c sont des nombres complexes avec a non nul.

On note Δ = δ^2 le discriminant de l'équation (E) .

Si Δ = 0, l'équation (E) admet une solution double z' = z'' = $\frac{-b}{(2a)}$

Si $\Delta \neq 0$, l'équation (E) admet deux solutions distincts :

z' = $\frac{-b-\delta}{(2a)}$ et z'' = $\frac{-b+\delta}{(2a)}$

Dans ce cas : a z² + b z + c = a(z – z')(z - z'')

Exemple

résoudre dans $\mathbb{C}$ z² – 2z -1 + 2i = 0

Δ = 4(3 -4 i). Les racines de Δ sont $\delta_1 = 2(2-i)$ et $\delta_1 = 2(-2+i)$.

Les solutions de l'équation sont : z' = $\frac{3-i}{2}$ et z'' = $\frac{-1+i}{2}$

2. Racine n-ième d'un nombre complexe

2.1 Formule de Moivre

2.2 Racine n-ième d'un nombre complexe

Soit Z = r (cos α + i sin α) un complexe donné. On appelle racine n-ième de Z tout nombre z tel que z^n= Z (n $\in$ IN).

Posons: z = ρ (cos θ+ i sin θ).

Il vient: ρ^n(cos θ+ i sinθ)^n=r (cos α+ i sin α).

En utilisant la formule de Moivre, on a :

ρ^n(cos n θ + i sin n θ) = r (cos α + i sin α).

Ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

On a donc: $z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$.

En donnant à k les valeurs 0 , 1 , 2 , … (n-1), on obtient n valeurs.

Tout nombre complexe non nul Z = r (cos α + i sin α) admet exactement n racines n-ièmes.

$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ k = 0, 1, … , (n-1)

Leurs images sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de centre O, de rayon $\sqrt[n]{r}$.

Exemple : Déterminer les racines quatrièmes de i.

Racines n-ièmes de l'unité

Z = 1, on a r = 1 et α = 0

Donc z^n = 1 admet pour solutions :

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$ avec k = 0 , 1, 2 …, (n-1)

Propriétés des racines n-ièmes de l’unité

La somme des racines n-ièmes de l’unité est nulle.

Les images des racines n-ièmes de l’unité sont les sommets d’un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.

Si z est une racine n-ièmes de l’unité, son inverse l’est aussi.

-Le produit des deux racines n-ièmes de l’unité est une racine n-ièmes de l’unité.

Exemple : racines cubiques de 1.

En faisant n = 3, on peut dire que $z^3 = 1$ admet trois solutions :

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$$

à k = 0 correspond : z0 = 1

à k = 1 correspond : $z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

à k = 2 correspond : $z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

On convient de poser : $j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

alors $\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})^2 = j^2$

D’où : Le nombre 1 a trois racines cubiques : 1 , j , j^2. Les images sont les sommets d’un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité.