Séquence 1 : L'ensemble des nombres complexes

1. Présentation

1.1 Introduction

Nous admettons que l'on peut construire un sur-ensemble de IR, noté $\mathbb{C}$, dont les éléments

sont appelés *nombres complexes*, et qui vérifie :

- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de IR et qui suivent les mêmes règles de calcul
- $\mathbb{C}$ contient un élément noté **i** tel que **$i^2 = -1$.**

1.2 Forme algébrique

Tout nombre complexe s'écrit de façon unique z = a + i b où a et b sont des réels.

Un nombre complexe est un nombre de la forme a + i b, où a et b sont des nombres réels

quelconques et i est un nombre vérifiant **$i^2 = -1$**

Pour le nombre complexe z = a + i b , a est appelé la partie réelle de z et b la partie imaginaire de z.

Notation : a = Re(z) et b = Im(z).

Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé **imaginaire pur**
Exemples
$z_1 = 1 - 2i$; $z_2 = 4i$; $z_3 = -3 + 2i$

1.3 Calcul dans $\mathbb{C}$

l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ suivent les même règles que dans IR .

1.3.1 Égalité de deux complexes

Comme tout complexe z s'écrit de façon unique z = a + ib, a et b $\in$ IR, on en déduit :

Deux complexes sont égaux si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Conséquence : a + ib = 0 $\Leftrightarrow$ a = 0 et b = 0.

1.3.2 Addition dans $\mathbb{C}$

a + ib) + (c + id) = (ac - bd) + i (ad + bc)

1.3.3 Multiplication dans $\mathbb{C}$

on effectue comme dans IR, mais on remplace i^2 par -1.
En particulier : $(a + ib)^2 = a^2 – b^2 + 2 iab$.
Exemple
Soit z = 3 + 2i et z' = 1 – 3i.Calculer z + z' ; z.z'
solution
z + z' = 4 – i et z.z' = 9 – 7i.
Conjugué d'un nombre complexe
Définition
Le conjugué de z = a + ib est le nombre complexe $\overline{z}$ = a – ib.
Propriétés
0n a :

- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.
- $z.\overline{z} = a^2 + b^2$

- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z.z'} = \overline{z} \, . \, \overline{z'}$
- $\overline{\overline{z}} = z$.

Quotient de deux nombres complexes

Tout nombre complexe non nul z admet un inverse $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$.

Alors $\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}}$.

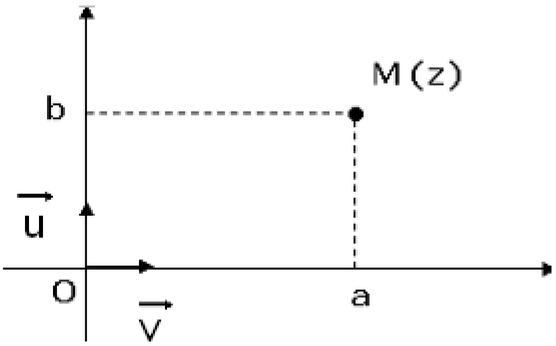
2. Représentation géométrique d'un nombre complexe

On appelle plan complexe, le plan rapporté à un repère orthonormé ($0, \vec{u}, \vec{v}$) tel que l'axe (0 ; $\vec{u}$) représente l'axe réel, et l'axe (0 ; $\vec{v}$)représente l'axe imaginaire.

2.1 Affixe d'un point

A tout nombre complexe z = a + ib on peut associer le point M de coordonnées (a , b) dans le plan muni d'un repère orthonormé ($0, \vec{u}, \vec{v}$).

On dit que : M est l'image du nombre complexe z , et z est l'affixe du point M. On note M(z).



- L'image d'un nombre réel est un point de l'axe réel.
- L'image d'un nombre imaginaire pur est un point de l'axe imaginaire.

Exemple : M (-2) ; N (3i) ; P (1 + 2i).

2.2 Affixe d'un vecteur

Soit A (z_A) et B(z_B) l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z = z_B - z_A$.

2.3 Représentation géométrique de l'opposé et du conjugué d'un nombre complexe

Les points image de z = a + ib et de son opposé -z = - a - ib sont symétrique par rapport à l'origine 0

Les points image de z = a + ib et de son conjugué $\overline{z}$ = -a - ib sont symétrique par rapport à l'origine 0.