Dénombrement

1. Les nouveaux nombres

1.1 le nombre factorielle

Pour tout entier naturel n, on définit et on note le nombre factorielle n par :

0! =1 et pour n>0 n! =n.(n-1).(n-2)….3.2.1.

Ainsi : 1! =1, 2!=2, 4!=4x3x2x1= 24, 8!=8x7x6x5x4x3x2x1=40320.

1.2 le nombre A_n^p

Pour deux entiers naturels n, et p on a :

– $A_n^p = 0$ si $p > n$

– $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leqslant n$.

Ainsi: $A_{10}^3 = \dfrac{10!}{(10-3)!} = 720$

1.3 Le nombre C_n^p

Pour deux entiers naturels n, et p on a :

– $C_n^p = 0$ si $p > n$

– $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \leqslant n$.

Ainsi : $C_{10}^3 = \dfrac{10!}{3!.(10-3)!} = 120$

2. Dénombrements

2.1 Cardinal d’un ensemble fini

Le cardinal d’un ensemble fini E, noté **Card E** est le nombre de ses éléments.

Exemple

Si E = {1, 2, 6, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }, Card E = 10

2.2 Arrangement avec répétition

Un arrangement de p éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E.

Ici p désigne un entier naturel.

Dans un arrangement, on doit respecter l'ordre, mais un élément quelconque de E peut revenir autant de fois que l'on veut dans une suite.

Si card E = n. le nombre d'arrangement d'élément de E est : $N = n^p$.

2.3 Arrangement sans répétition

Un arrangement sans répétition de p éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E deux à deux distincts.Ici p désigne un entier naturel.

Dans ce genre d'arrangement, on doit aussi respecter l'ordre, et, éviter de faire revenir une deuxième fois un élément déjà choisi.

Dans le cas où n=p, on parle de permutation.

Si card E =n, le nombre d'arrangement sans répétition d'éléments de E est :

$$N = A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

2.4 Combinaison

Une combinaison de p éléments de E est un sous ensemble de E à p éléments.

- Dans une combinaison, il n'y a plus d'ordre
-

Si card E =n , le nombre de combinaison de p éléments de E est :

$$N = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

2.5 Règle du produit

Si on peut choisir un objet A de α façons, et un objet B de β façons, alors on peut choisir A puis B de $\alpha . \beta$ façons.

2.6 méthodes

Résumons dans un tableau l'utilisation de ces formules.

Successifs = avec ordre		***_Simultané = sans ordre***
Avec remise=un objet peut revenir	*Sans remise=tous les p objets sont distincts*	**_Combinaison** C_n^p
Arrangement n^p	*Arrangement sans répétition* A_n^p	

3. Exercice résolu

Un sac contient 9 jetons indiscernable au toucher et portant les numéros 1 2, 3,…, 9.

1) 0n tire successivement trois jetons du sac , en remettant à chaque fois le jeton tiré dans le sac. 0n écrit côte à côte chacun des trois chiffres tirées dans l'ordre du tirage. 0n obtient ainsi un nombre à trois chiffres. Combien peut-on obtenir de résultats différents ?

2) 0n tire successivement sans remise trois jetons du sac. 0Nplace les jetons côte à côte dans l'ordre du tirage. Combien peut-on former ainsi de nombre de 3 chiffres ?

3) 0n procède au tirage de trois jetons simultanément. Quel est le nombre de tirage possible ?

Réponse

1) Exemples de résultats:232,551, 333,124, …

C'est un arrangement avec répétition, leur nombre est donc : 9^3 =729.

2)Exemples de résultats : 145, 541,415, 321, ...

C'est un arrangement sans répétition, leur nombre est donc : A_9^3 = 504 .

3) Exemples de résultats :

Il s'agit de combinaison. Il y a donc C_9^3 = 84 cas possibles.