Primitives d'une fonction

Exercice 1

Déterminer toutes les primitives de f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=2x^2-\frac{3x}{2}-5$ b) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ c) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

d) $f(x)=(x+2)^2$ e) $f(x)=(3x+2)^2$ f) $f(x)=2x(x^2+2)^2$

g) $f(x)=(2x+2)(x^2+2x-3)^2$ h) $f(x)=(x+1)(x^2+2x-3)^3$ i) $f(x)=\frac{2}{(2x+1)^2}$

j) $f(x)=\frac{2x^4+3x^2-1}{x^2}$ k) $f(x)=\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}$ l) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$

Exercice 2

Déterminer toutes les primitives de f dans chacun des cas suivants :

a) $\mathbf{f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})}$ b) $f(x)=\sin 2x$ c) $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$

d) $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ e) $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})\sqrt{\cos(2x+\frac{\pi}{3})}$ f) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$

g) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$ h) $f(x)=\tan^2 x$ i) $f(x)=\frac{\tan^3 2x}{\cos^2 2x}$

Exercice 3

Déterminer toutes les primitives de f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=(\cos x)^2\sin x$ b**)** $f(x)=\cos^3 x.\sin x$ c) $f(x)=\cos^3 x\sin^2 x$

d) $f(x)=\cos^3 x\sin^3 x$ e) $f(x)=\cos^2 x\sin^2 x$ f) $f(x)=\cos^2 x$

g) $f(x)=\sin^4 x$ h) $f(x)=\cos^2 x\sin^4 x$ i) $f(x)=\cos^2 x\sin^4 2x$

Exercice 4

1) Soit $\mathbf{f(x)=\frac{2x^2+x-1}{(x+1)^2}}$

   a) Déterminer les réels a et b tels que pour tout x différent de -1, $f(x)=a+\frac{b}{(x+1)^2}$.

   b) En déduire toutes les primitives de f

2) Soit $\mathbf{f(x)=\frac{8x^3-4x^2-2x+3}{(2x-1)^2}}$

   a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x différent de $\frac{1}{2}$ $f(x)=ax+b+\frac{c}{(2x-1)^2}$.

   b) En déduire toutes les primitives de f

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive de f qui vérifie la condition donnée :

a) $f(x)=\frac{1}{(2x+1)^5}$, f(0) = 1 b) $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$, f(1) = 0 c) $\mathbf{f(x)=\cos(3x+\frac{\pi}{4})}$, f(0) = -1

Exercice 6
Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0.
Montrer que si f est paire, alors la primitive F de f qui s'annule en O sur I est impaire (Indication : étudier la fonction $g : x \mapsto F(-x) + F(x)$; et si f est impaire, alors toute primitive F de f sur I est paire. (Etudier $h : x \mapsto F(-x) + F(x)$).

Exercice 7
Soit f_n la fonction définie par $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$ où $n > 1$.

a) Déterminer la primitive F_n de f telle que $F_n(0)=1$.
b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(\frac{1}{2})$

Exercice 8
Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \sin x + \sin^3 x$.
1 ° Calculer f ' (x) et f ''(x) et montrer qu'il existe deux constantes a et b (que l'on déterminera) telles que $f''(x) + a f(x) = b \sin x$ pour tout x.
2° En déduire une primitive de f.

Exercice 9
Soit F la fonction définie sur IR par $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.
1. Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée f.
2. f est-elle continue ?

Exercice 10
Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} \mathbf{f(x)} = \sqrt{\mathbf{x}+1} & \textbf{si } \mathbf{x} \geq 0 \\ \mathbf{f(x)} = \dfrac{1}{\mathbf{(x+a)}^2} & \textbf{si } \mathbf{x} < 0 \end{cases}$.

a) Déterminer la valeur de a pour que f admette un primitive en 0.
b) Déterminer une primitive de f.

Exercice 11
Soit $f(x) = x\sqrt{x^2+4}$
Déterminer pour une primitive F de f telle que $F(x) = (ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+4}$