Série 1 : Exercices sur la dérivation des fonctions

Calcul de dérivées

Exercice 1 :

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes après avoir précisé leur ensemble de définition.

a) $f_1(x)=3x^2+x-1$ b) $f_2(x)=x^4-3x^2+x$ c) $f_3(x)=x^3(x-1)$

d) $f_4(x)=2+(2x-1)(x-2)^2$ e) $f_5(x)=\frac{1}{1+2x}$ f) $f_6(x)=\frac{2x+5}{x^2-1}$

g) $f_7(x)=\frac{1}{4x^2-1}$ h) $f_8(x)=\frac{x^2-7x+3}{x^2+3x+4}$ i) $f_9(x)=\frac{(x+2)^2}{(2x-1)^2}$

j) $f_{10}(x)=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)}$ k) $f_{11}(x)=x-\frac{1}{2x-5}$ l) $f_{12}(x)=3x+2-\frac{x}{x-1}$

Tangentes

Exercice 2 :

Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0.

a) $f_1(x)=x^2-2x+3,\ x_0=0$ b) $f_2(x)=\frac{x-2}{x+3},\ x_0=1$

c) $f_3(x)=\frac{1}{x-1},\ x_0=2$ d) $f_4(x)=x+3+\frac{1}{x},\ x_0=\frac{2}{3}$

Exercice 3 :

Déterminer les points de la courbe C de la fonction f où la tangente à C passe par l'origine O du repère.

a) $f_1(x)=5x^2-6x-5$ b) $f_2(x)=x^3-3x^2+3x-1$

Exercice 4 :

Déterminer les valeurs du paramètre réel m pour lesquels la courbe représentant la fonction $f(x)=mx^3-5x^2-2x+3$ admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

Exercice 5 :

Soit a et b deux réels et f la fonction $f(x)=ax+b+\frac{1}{3-x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer a et b pour que la courbe représentant f passe par le point A(2 ; 1) et admette en ce point une tangente horizontale.

Optimisation

Exercice 6 :

Deux nombres ont pour somme 16. Déterminer ces nombres pour que leur produit soit maximal.

Exercice 7 :

Un jardinier doit construire un parterre de fleurs ayant la forme d'un secteur circulaire. Il dispose de 100 mètres de fil de fer pour l'entourer. Quel rayon doit-il donner au cercle pour que la surface de son parterre soit la plus grande possible ?

Indication : la surface d'un secteur circulaire d'angle au centre α (en radians) et de rayon R est $S=\frac{1}{2}R^2\alpha$ *. Expliquez pourquoi.*

Exercice 8 :

On enlève aux quatre coins d'un carton de côté 30cm des carrés de côté x. On forme ensuite une boîte sans couvercle en relevant les rectangles latéraux. Calculer la valeur x_0 de x pour que le volume de la boîte obtenue soit maximal.

Applications de la dérivée

Exercice 9 : *Coût marginal en économie*

Une entreprise produit certains objets. Notons C(q) le coût de fabrication de q objets.

On se pose parfois la question suivante : "Ayant fabriqué q objets, quel sera le coût de fabrication du q+1-ième objet ?" Ce coût est le coût marginal au rang q ; à savoir C(q+1)-C(q). On peut l'écrire $\frac{C(q+1)-C(q)}{(q+1)-q}$. En pratique, on assimile ce coût marginal au nombre dérivé C'(q) de la fonction C.

Exemple : la fonction coût total est $C:q\rightarrow 80+8q-\frac{1}{50}q^2$

1. Calculer C(26) - C(25) et comparer avec C'(25).
2. Calculer le coût marginal pour C = 20 et C = 50.

Exercice 10 : *Taille d'un lot économique*

Une entreprise fabrique un certain type d'objets et le vend par lots de q objets. Le coût de fabrication de q objets est noté C(q). Le problème est de trouver une valeur q_0 de q de sorte que $C(q_0)$ soit minimal. On vendra alors le produit en lots de q_0 objets. On dit que ce lot est le lot économique.

Supposons que l'on ait $C(q)=\frac{100}{q}+0{,}36q+1000$

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $C:q\rightarrow C(q)$
2. Quelle est la taille q_0 du lot économique ?