# Fonctions dérivées

## 1. Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On appelle fonction dérivée de f (ou dérivée de f) sur I la fonction notée f', qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x.

$$f': x \mapsto f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

## 2. Dérivées des fonctions usuelles

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| a $(\in R)$ | 0 |
| x | 1 |
| $x^2$ | 2x |
| $x^n$ $(n \in IN^*)$ | $nx^{n-1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| sin x | cos x |
| cos x | - sin x |
| tan x | $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2(x)}$ |

**Démonstration**

- Soit $f(x) = a$ quel que soit $x \in R$ .

f est constante $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a-a}{h} = 0$

donc $f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$

- Soit $f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

- Soit $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(x+h)^2-(x^2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} 2x+h = 2x$$

- Si $f(x) = x^n$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left[C_n^0 x^n h^0 + \cdots + C_n^{n-1} x h^{n-1} + C_n^n h^n - x^n\right]$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left[C_n^1 x^{n-1} h + \cdots + C_n^n h^n\right] = \lim_{h\to 0^+} (C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} h + \cdots + C_n^n h^{n-1})$$
$$= C_n^1 x^{n-1} = x^{n-1}$$

- Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

- Soit $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

*<u>Exemple :</u>* Calculer le nombre dérivé de $f : x \to x^3$ en 2.

$$f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2, f'(2) = 12$$

## 3. Opérations sur les fonctions dérivées

**Théorème**

Si u et v sont des fonctions dérivables sur I alors $u+v,\ u\cdot v\ \ et\ \lambda u\,(\lambda \in R)$ sont dérivables sur I. Si de plus, v ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I.

Et on a :

$$(u+v)'=u'+v'$$
$$(u\cdot v)'=vu'+u'v$$
$$(\lambda u)'=\lambda\cdot u'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

En particulier $\left(\frac{1}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^2}$

Si u est dérivable et strictement positive sur I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable et $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

***Démonstration***

- u et v sont dérivables sur I, donc quel que soit $x\in I$, $\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$ et $\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$

sont finies

- u et v sont dérivables, donc elle sont continues. Ainsi, $\lim_{h\to 0}u(x+h)=u(x)$ et $\lim_{h\to 0}v(x+h)=v(x)$

Ces résultats seront utilisés dans les démonstrations

- $$\lim_{h\to 0}\frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-v(x+h)-u(x)-v(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$
$$=u'(x)+v'(x)$$

- $$\lim_{h\to 0}\frac{(u.v)(x+h)-(u.v)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h).v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{[u(x+h)-u(x)].v(x)+[v(x+h)-v(x)]u(x)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right]v(x+h)+\lim_{h\to 0}\left[\frac{v(x+h)-v(x)}{h}u(x+h)\right]$$

D'où (uv)'(x)=u'(x).v(x) +u(x).v'(x).

- Si v est constante, $v(x)=\lambda$ quel que soit x,

$$(u.v)'=(\lambda u)'=\lambda' u+\lambda u$$
or $\lambda'=0$
$$(\lambda u)'=\lambda.u'$$

- Si f(x) = $\dfrac{1}{u(x)}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{u}(x+h)-\frac{1}{u}(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{u(x+h)}-\frac{1}{u(x)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times\frac{1}{u(x+h).u(x)}$$
$$=\frac{-u'(x)}{[u(x)]^2}$$

d'où $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$

- $$\left(\frac{u}{v}\right)'=\left(u\times\frac{1}{v}\right)'=u'\left(\frac{1}{v}\right)+\left(\frac{1}{v}\right)'u=\left(u'\times\frac{1}{v}\right)+\left(\frac{-v'}{v^2}\times u\right)=\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2}=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

- Soit f(x)= $\sqrt{u(x)}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h(\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)})}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times\frac{1}{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}\right]$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}$$
$$=u'(x).\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}$$

**Conséquences**

- Si u est dérivable, u² est dérivable et $(u^2)'=2uu'$

  Plus généralement, $u^n, (n\in IN^*)$ est dérivable et $(u^n)'=n.u^{n-1}u'$
- Toute fonction polynôme est dérivable sur IR
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition.

- **Exercice**

u est une fonction dérivable sur I, et tel que $u(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$.

Montrer que $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)'=-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$ , $n\in N^*$

Réponses

a) $u(x) \neq 0$ pour tout x de I

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-n.u^{n-1}.u'}{(u^n)^2} = \frac{-n.u^{n-1}.u'}{u^{2n}} = \frac{-nu'}{u^{2n}.u^{-n+1}}$$

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$$

**Théorème**

Quel que soit $n \in \mathbf{Z}^*$, $(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$ si u est une fonction dérivable.

## 4. Dérivée seconde d'une fonction

Si f est dérivable sur I et sa dérivée f ' est, elle aussi, dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable sur I, et la dérivée de f ', notée f'', est appelée dérivée seconde de f.

**Exemple :**

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x - 1$$

f est une fonction polynôme donc dérivable sur IR.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 7$$

f ' est une fonction polynôme donc dérivable sur IR.

$$f''(x) = 12x - 6$$

Plus généralement, si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, on appelle dérivée $n^e$ de f la dérivée de la dérivée $(n-1)^e$ de f. On la note $f^{(n)}$.

Ainsi $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

La dérivée $3^è$ de f est la dérivée de la dérivée seconde : $f''' = f^{(3)} = (f'')'$

La dérivée $10^e$ de f est la dérivée de la dérivée $9^e$ de f : $f^{(10)} = (f^{(9)})'$

Exemple :

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables

Soit f (x) = sin x.

f'(x) = cos x, f''(x)= (f')(x)= - sin x, f'''(x)= $f^{(3)}$(x)= (f '')' (x)= - cos x…

## 5. Dérivée d'une fonction composée

**Théorème**

Si f est dérivable sur I et g dérivable sur J = f(I), alors gof est dérivable sur I et (gof)'= f'. g'o f, i.i pour tout x de I, (gof)'(x)=f '(x). g'(f(x)).

En particulier,

- si f(x)= cos (ax+b), alors f '(x) = -a. sin (ax+b)

-si f(x)= sin (ax+b), alors f '(x) = a. cos (ax+b)

- si f(x)= $(ax+b)^n$, $(n \in IN^*)$ alors f '(x) = a. n $(ax+b)^{n-1}$

**Exemple**

On peut retrouver la formule de la dérivée de $\sqrt{u}$ avec cette formule :

Soit f la fonction définie par f(x)= $\sqrt{u(x)}$

Posons g(x)= $\sqrt{x}$ . On a f(x)= g(u(x)) = g o u (x)

g est dérivable sur ] 0 ; +∞ [ et $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Si u est dérivable et u(x) > 0 pour tout x de I , alors f est dérivable sur I et (gof)'(x)=f '(x). g'(f(x)),

ou $f'(x)=u'(x).\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

# 6. Dérivée de la réciproque

## 6.1 Théorème

Soit f une fonction définie et continue et strictement monotone sur un intervalle I, et $x_0$ un élément de I.

- Si f est dérivable en $x_0$ et si $f'(x_0)\neq 0$ alors sa réciproque $f^{-1}$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$ .

- Si f est dérivable sur I et si sa dérivée ne s'annule pas sur I, alors sa réciproque $f^{-1}$ est dérivable sur J = f(I) et $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ .

Exemple

f (x)= $x^n$, n > 0. f est dérivable sur I = ] 0 ; +∞ [ et f '(x)= n $x^{n-1}$

f est continue et strictement croissante sur I = ] 0 ; +∞ [. Alors elle réalise une bijection de I = ] 0 ; +∞ [ sur J = f(I)= ] 0 ; +∞ [ , et admet une réciproque $f^{-1}$ définie par $f^{-1}(y)$ = $\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}}$

De plus elle est dérivable sur I, et sa dérivée ne s'annule pas sur I. Ainsi, sa réciproque $f^{-1}$ est dérivable sur J.

f '(x)= n $x^{n-1}$ , donc f '( $f^{-1}(y)$ )= n $(f^{-1}(y))^{n-1}$.

Comme $f^{-1}(y)$ = $\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}}$ , on a f '( $f^{-1}(y)$ )= n $(y^{\frac{1}{n}})^{n-1}$ = $ny^{\frac{n-1}{n}}=ny^{1-\frac{1}{n}}$ .

Finalement, $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\frac{1}{n}\frac{1}{y^{1-\frac{1}{n}}}$

Ainsi, si $f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ , alors f est dérivable sur I et $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}$