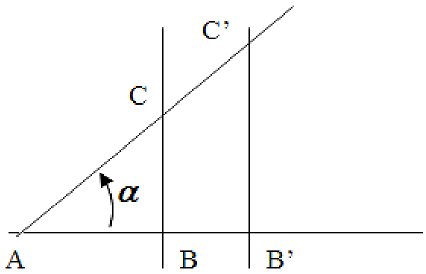
Trigonométrie : généralités

1. Rappel et définitions

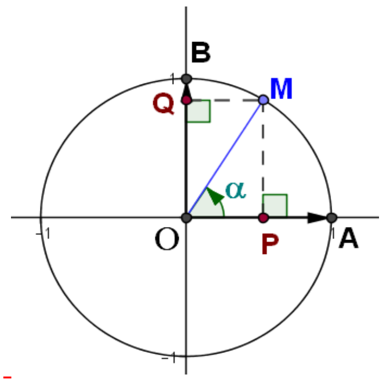


$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$$
$$\sin\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$$
$$\tan\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$$

1.1 Cercle trigonométrique

Une unité de longueur étant choisie, on appelle cercle trigonométrique un cercle centré en un point 0, de rayon 1, et sur lequel on a choisi un point A comme origine pour la mesure des arcs, On lui associe le repère $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ avec $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ orienté dans le sens direct.

On prend l'axe (OA) comme origine de la mesure des angles.



1.2 Mesure d'arcs – Mesure d'angles

Prenons un point M du cercle trigonométrique. désigne un arc orienté.

Le radian est l'arc dont la longueur est égale au rayon.

Un angle de 1 radian est un angle au centre qui intercepte un arc de 1 radian.

La mesure l de la longueur d'un arc est donnée par $l = R\alpha$ où R est le rayon et α la mesure en radian de l'angle correspondant.

1.3 Angles de deux vecteurs

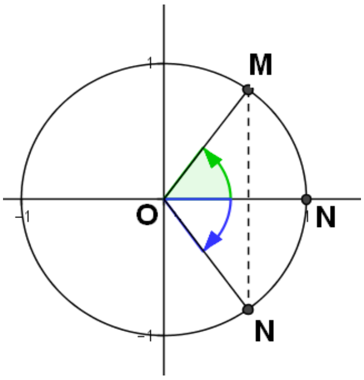
$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$ désigne un angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$

C'est aussi l'angle des deux demi-droites de même origine O.

1.4 Quelques propriétés des angles orientés

1.4.1 Angles opposés

- Deux angles orientés $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{ON})$ sont dits opposés si M et N sont symétriques par rapport à la droite (OA)



1.4.2 Relation de Chasles

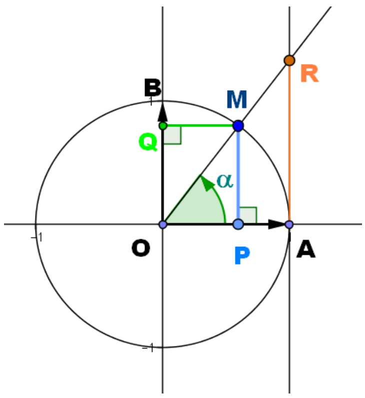
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs

Quel que soit $\vec{w}$, $(\vec{u};\vec{w})+(\vec{w};\vec{v})=(\vec{u};\vec{v})$

1.5 Fonctions circulaires

On considère l'application φ qui, à tout angle α , fait correspondre le point M(x ; y) du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})=\alpha$

$$\varphi(\alpha)=M \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})=\alpha$$



On a alors

$$\cos\alpha=\frac{OP}{OM}=OP=x$$

$$\sin\alpha=\frac{PM}{OM}=PM=OQ=y$$

$$\overrightarrow{OM} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\sin\alpha)\vec{j}$$

$$\tan\alpha = \frac{PM}{OP} = \frac{AR}{OA} = AR$$

$$\varphi(\alpha + 2\pi) = M$$

$$\varphi(\alpha + 2k\pi) = M$$

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$$

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle OPM, on a $OP^2+PM^2 = OM^2$

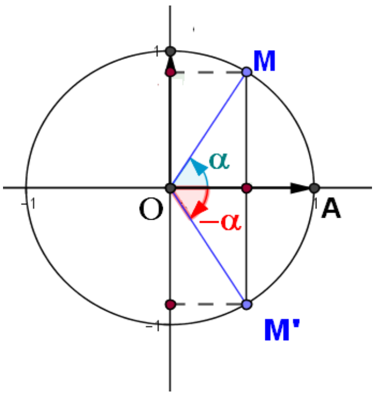
ou $\cos^2\boldsymbol{\alpha} + \sin^2\boldsymbol{\alpha} = 1$

De cette égalité, on déduit $-1 \leq \sin\boldsymbol{\alpha} < 1 \quad et \quad -1 \leq \cos\boldsymbol{\alpha} \leq 1$

2. Angles associés

2.1 Angles opposés

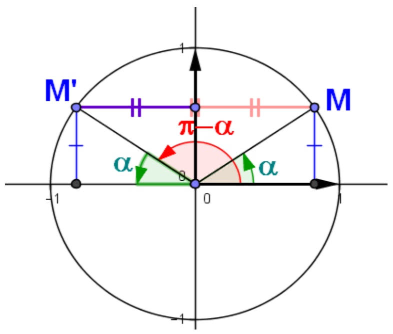
Deux angles α et α' sont opposés si leurs images M et M' par φ sont symétriques par rapport à l'axe (OA) (on écrit $\alpha = -\alpha'$)



$$\begin{array}{|l|}\hline \cos\alpha' = \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin\alpha' = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \tan\alpha = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha \\ \hline\end{array}$$

2.2 Angles supplémentaires

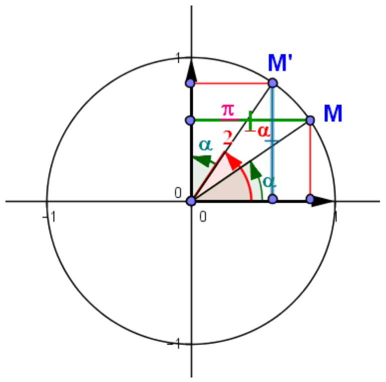
α et α' sont supplémentaires si $\alpha + \alpha' = \pi$, donc si $\alpha' = \pi - \alpha$



$$\begin{array}{|l|}\hline \cos\alpha' = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \\ \sin\alpha' = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \\ \tan\alpha' = \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha \\ \hline\end{array}$$

2.3 Angles complémentaires

α et α' sont complémentaires, si $\alpha + \alpha' = \dfrac{\pi}{2}$, donc si $\alpha' = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$



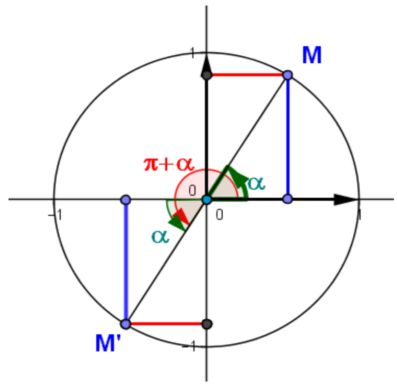
$$\cos\alpha' = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin\alpha' = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan\alpha' = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha} = \cot an\alpha$$

2.4 Angles dont la différence est π

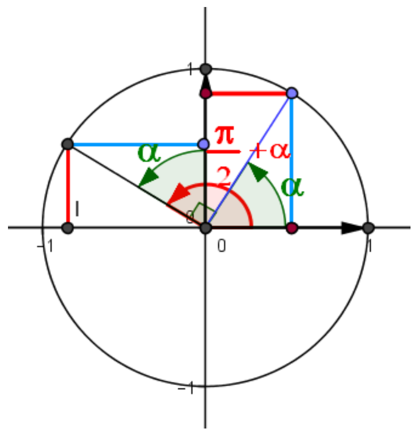
C'est-à-dire $\alpha - \alpha' = \pi \quad ou \quad \alpha' = \pi + \alpha$



$$\cos\alpha' = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin\alpha' = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\tan\alpha' = \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$$

2.5 Angles dont la différence est $\dfrac{\pi}{2}$

C'est-à-dire $\alpha - \alpha' = \dfrac{\pi}{2} \quad ou \quad \alpha' = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$



$$\cos\alpha' = \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\sin\alpha' = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan\alpha' = \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

3. Angles remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0