La méthode de Cramer

1. Déterminant (Méthode de Cramer)

On utilise ici des résultats vus en géométrie pour résoudre le système $\begin{cases} ax+bx=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

Chacune de ces équations est une équation d'une droite, soit (D) et (D').

On calcule les nombre suivants, appelés déterminants du systèmes : $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$,

$\Delta_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-c'b$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c$.

- Si $\Delta \neq 0$, on a une solution unique : $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$.

Exemple :

Résolvons dans IR² le système : $\begin{cases} 3x+2y=31 \\ 11x+7y=112 \end{cases}$.

$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 11 & 7 \end{vmatrix}=3\times 7-11\times 2=-1$. $\Delta\neq 0$ donc on a un couple de solution unique (x ; y).

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 31 & 2 \\ 112 & 7 \end{vmatrix}=31\times 7-2\times 112=-7$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 31 \\ 11 & 112 \end{vmatrix}=3\times 112-31\times 11=5$

D'où x = 7, y = 5 et S = { (7 ; 5) }.

- Si Δ = 0 et $\Delta_x = \Delta_y = 0$, alors les deux équations du système sont équivalentes. On résout une des deux équations, par exemple ax + by = c.

Pour résoudre dans IR² l'équation ax + by = c, avec $(a,b)\neq(0,0)$, on réorganise les termes de cette équation pour isoler y.

On obtient : $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$. En posant x = λ, on a : $y=-\frac{a}{b}\lambda+\frac{c}{b}$.

L'ensemble des solutions de l'équation est $S=\left\{\lambda ; -\frac{a}{b}\lambda+\frac{c}{b},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$.

Comme on a une infinité de valeurs de λ, le système admet une infinité de solutions.

Exemple : Résolvons dans IR² le système : $\begin{cases} 3x-y=-1 \\ -6x+2y=2 \end{cases}$.

On a Δ = 0 et $\Delta_x = \Delta_y = 0$. Les deux équations sont équivalentes.

On va résoudre la première équation: 3x - y = -1.

En posant x = λ, on a : y = 3 λ+1.

L'ensemble des solutions est $S=\{\lambda ; 3\lambda+1, \lambda\in\mathbb{R}\}$.

Si Δ = 0 et $\Delta_x\neq 0$ ou $\Delta_y\neq 0$ alors le système est impossible et $S=\emptyset$.

2. Exemple de résolution par changement de variable

Résoudre le système suivant en posant X = $\frac{1}{x}$ et Y = $\frac{1}{y}$

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-3 \end{cases}$$

Solution

en posant X = $\frac{1}{x}$ et Y = $\frac{1}{y}$ le système devient $\begin{cases} X+Y=5 \\ X-Y=-3 \end{cases}$

on a X = 1 et Y = 4 donc la solution est x = $\frac{1}{X}$ = 1 et y = $\frac{1}{4}$