Ligne de niveau

1. Définitions

Sur une carte topographique, une ligne de niveau (ou courbe de niveau) est une courbe reliant les points de même altitude.

Si on note g(M) l'altitude d'un point M, la ligne de niveau k est l'ensemble des points M tels que g(M) = k.

Les isobares et les isothermes sont aussi des lignes de niveaux. Ce sont respectivement les courbes de même pression et courbe de même température!

On généralise cette notion en considérant une application f du plan, qui à tout point M associe le réel f(M) ; la ligne de niveau k de l'application f est l'ensemble des points M tels que f(M) = k.

2. Exemples

1.- Étant donné un point A du plan, f est l'application du plan qui à tout point M associe la distance de M à A.Quelle est la ligne de niveau 2 ?

2.- Soient A et B deux points et f l'application du plan, telle que $f(M)=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$

Quelle est la ligne de niveau 0 ?

3.- Soient A et B deux points et f l'application du plan, telle que $f(M)=\dfrac{MA}{MB}$

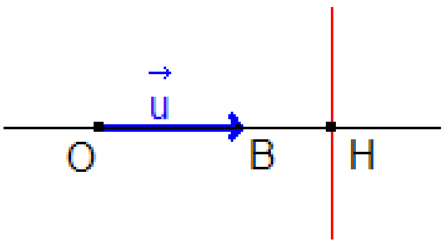
Quelle est la ligne de niveau 1 ?

4. Lignes de niveau de $f : M \mapsto \vec{u}\cdot\overrightarrow{OM}$

Soit $\vec{u}$ est un vecteur non nul et O un point du plan. A chaque point M du plan on associe le réel $f(M)=\vec{u}\cdot\overrightarrow{OM}$.

On se propose de déterminer la ligne de niveau k de f, où k est un réel donné.

Notons B le point tel que $\overrightarrow{OB}=\vec{u}$ et H le point de la droite (OB) tel que $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OH}=k$.



La ligne de niveau k est une droite perpendiculaire à (OB)

5. Ligne de niveau de $f : M \mapsto MA^2+MB^2$

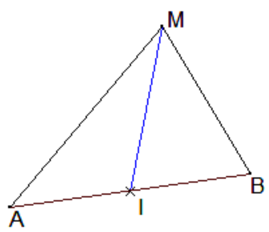
A et B sont deux points distincts donnés.

A chaque point M du plan on associe le réel $f(M) = MA^2+MB^2$.

Notons I le milieu du segment [AB].

On a alors $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}$ *et* $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}$

$\overrightarrow{MA}^2=\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}=MI^2+IA^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}$



CC BY SA

$\overrightarrow{MB}^2=\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IB}^2+2\,\overrightarrow{MI}\,.\,\overrightarrow{IB}=MI^2+IB^2+2\,\overrightarrow{MI}\,.\,\overrightarrow{IB}$

Et $MA^2+MB^2=2\,MI^2+IA^2+IB^2+2\,\overrightarrow{MI}\,.\,(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})$

Comme I est le milieu de [AB], $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et $IA^2=IB^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\frac{AB^2}{4}$

D'où (théorème de la médiane) $MA^2+MB^2=2\,MI^2+\frac{AB^2}{2}$

Déterminer la ligne de niveau k de f revient donc à déterminer l'ensemble des points M tels que $2\,MI^2+\frac{AB^2}{2}=k$ ou $MI^2=\frac{k}{2}-\frac{AB^2}{4}$.

- Si $k<\frac{AB^2}{2}$, l'ensemble est vide
- Si $k=\frac{AB^2}{2}$, c'est le singleton $\{I\}$
- Si $k>\frac{AB^2}{2}$, c'est le cercle de centre I et de rayon $\frac{\sqrt{2k-AB^2}}{2}$

6. Ligne de niveau de $f\,:\,M\mapsto MA^2-MB^2$

A et B sont deux points distincts donnés.

A chaque point M du plan on associe le réel $f\,(M)=MA^2-MB^2$.

Notons I le milieu du segment [AB].

$MA^2-MB^2=\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$

En écrivant $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}$ *et* $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}$, on a

$MA^2-MB^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$

Comme I est le milieu de [AB], on a $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$.

Donc $MA^2-MB^2=\overrightarrow{BA}\,.\,2.\,\overrightarrow{MI}$

Et la ligne de niveau k est la ligne de niveau k de l'application $f\,:\,M\mapsto\,.\,\vec{u}.\,\overrightarrow{IM}$ où $\vec{u}=2.\,\overrightarrow{AB}$

6. Ligne de niveau de $f\,:\,M\mapsto\alpha\,MA^2+\beta\,MB^2$

A et B sont deux points distincts donnés.

A chaque point M du plan on associe le réel $f\,(M)=\alpha\,MA^2+\beta\,MB^2$.

Notons G le barycentre de (A,α) et $(B;\beta)$

$MA^2=(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GM})^2=GA^2+GM^2-2.\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GM}$

$MB^2=(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GM})^2=GB^2+GM^2-2.\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GM}$.

$f(M) = \alpha(GA^2 + GM^2 - 2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GM}) + (GB^2 + GM^2 - 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GM})$

$\quad = \alpha GA^2 + \beta GB^2 + (\alpha+\beta)GM^2 - 2(\alpha.\overrightarrow{GA} + \beta.\overrightarrow{GB}).\overrightarrow{GM}$

Or, G étant le barycentre de $(A\ ,\ \alpha)\ et\ (\ B\ ;\ \beta\ )$, on a $(\alpha.\overrightarrow{GA} + \beta.\overrightarrow{GB}) = \vec{0}$.

Donc $f(M) = f(G) + (\alpha+\beta).GM^2$

Et comme $f\ (M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2$, on a : f(M) = k si et seulement si. $GM^2 = \dfrac{k - f(G)}{\alpha+\beta}$

La ligne de niveau k de f est donc :

- le cercle de centre G et de rayon $R = \sqrt{\dfrac{k-f(G)}{\alpha+\beta}}$ si k > f(G)
- l'ensemble vide si k < f(G)
- le singleton $\{G\}$ si k = f(G)