Suites numériques réelles : généralités

1. Généralités

1.1 Définitions:

On appelle suite numérique réelle, toute application u d'une partie I de N dans R. L'image d'un entier n est notée u_n

$$u : I \rightarrow R$$
$$n \mapsto u(n) = u_n$$

Le terme d'indice n u_n , est appelé terme général de la suite u. et on note aussi $u=(u_n)$.

Si u est définie sur IN*

le 1e terme est u_1

le 2e terme est u_2

le ne terme est u_n

Si n est définie sur IN tout entier

le 1e terme est u_0

le 2e terme est u_1

le ne terme est u_{n-1}

Deux façons de définir une suite :

Une suite peut être définie par la donnée de l'expression de son terme général en fonction de n

Exemple :

(u_n) est la suite définie par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\left(u_n = f(n)\ avec\ f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}\right)$

$$u_0=0\ ;\ u_1=\frac{1}{2}\ ;\ u_{100}=\frac{100}{101}$$

On peut aussi définir une suite par la donnée d'un premier terme (u_0 ou u_1 en général) et d'une relation entre deux termes consécutifs quelconques de la forme $u_{n+1}= f(u_n)$

Exemple : (u_n) est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1} \end{cases}$$

On a: $u_1=\frac{u_0}{u_0+1}=\frac{1}{2}$; $u_2=\frac{u_1}{u_1+1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{3}$; $u_3=\frac{1}{4}$

La relation $u_{n+1}= f(u_n)$ est dite relation de récurrence.

La relation de récurrence peut lier trois termes (ou même plus) consécutifs.

Exemple : (u_n) est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0=1\,;\ u_1=2 \\ u_n+1=\frac{u_n-u_{n-1}}{u_n+u_{n-1}} \end{cases}.$$

On a alors $u_3=\frac{u_2-u_1}{u_2+u_1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$; $u_4=\frac{u_3-u_2}{u_3+u_2}\dots$;

1.2 Sens de variation d'une suite :

1.2.1 définitions :

- Une suite (u_n) est dite croissante si quel que soit n, $u_{n+1}\geq u_n$

- Une suite (u_n) est dite croissante si quel que soit n, $u_{n+1}\leq u_n$

- (u_n) est dite constante ou stationnaire si quel que soit n, $u_{n+1}=u_n$

1.3 Etude de variation :

1[e] méthode :

On étudie le signe de $u_{n+1}-u_n$:

- Si $u_{n+1}-u_n\geq 0$; (u_n) est croissante
- Si $u_{n+1}-u_n\leq 0$, alors (u_n) est décroissante
- Si $u_{n+1}-u_n=0$; (u_n) est constante

2[e] méthode :

Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :

- si $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$ quel que soit n, alors (u_n) est croissante
- si $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$ quel que soit n, alors (u_n) est décroissante
- si $\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ quel que soit n, alors (u_n) est constante

3[e] méthode :
Si (u_n) est définie par $u_n= f(u_n)$, on étudie la variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$

- si f est croissante, (u_n) est croissante
- si f est croissante ; (u_n) est croissante
- si f est constante, (u_n) est constante
-

2. Limite et convergence d'une suite

2.1 Définitions

On dit que (u_n) admet *l* pour limite si lorsque n prend les valeurs de plus en plus grandes, les termes u_n finissent par s'accumuler autour de *l*.

Notation : $\lim_{n \to \infty} u_n = l$ ou $\lim u_n = l$

Si on pose $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto u(x)$ où u est la fonction telle que $u(n) = u_n$ pour tout entier n, on peut écrire :

$\lim_{n \to \infty} u_n = l$ si et seulement si $\lim_{x \to +\infty} u(x) = l$

On dit dans ce cas que (u_n) est convergente et qu'elle converge vers l.

Une suite non convergente est dite divergente.

(u_n) est divergente si elle a pour limite $+\infty$ *ou* $-\infty$, ou si elle n'a pas de limite

2.2 Suites de référence

2.2.1 Suite constante

Soit $u_n = k$ quel que soit n

On a $\lim (u_n) = k$

2.2.2 Suite du type $u_n = n^\alpha$

- Si $\alpha > 0$, $\lim(u_n) = +\infty$
- Si $\alpha < 0$, $\lim(u_n) = 0$