Équation - inéquation PL

Équation du second degré

1. Forme canonique

1.1 Recherche de la forme canonique

Soit le trinôme $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$

En mettant a en facteur, on obtient : $f(x)=a[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}]$

D'autre part, on sait que $(x+\frac{b}{2a})^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$

donc : $x^2+\frac{b}{a}x=(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}$

D'où $f(x)=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}]$

En mettant au même dénominateur, $f(x)=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}]$

En posant $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-(\frac{b^2-4ac}{4a})$, on a $f(x)=a[(x+\alpha)^2+\beta]$

Le nombre $\Delta=b^2-4ac$ est appelé discriminant de l'équation

L'écriture $f(x)=a[(x+\alpha)^2+\beta]$ est appelée forme canonique de f(x). La forme canonique permet de savoir si on peut factoriser ou non le trinôme

1.2 Factorisation à partir de la forme canonique

- Si $\beta > 0$, 0n ne peut pas factoriser f(x).
- Si $\beta = 0$, $f(x) = a(x+\alpha)^2 = a(x+\alpha)(x-\alpha)$;
- Si $\beta < 0$, $f(x) = a[(x+\alpha)^2 - k^2] = a(x+\alpha-k)(x+\alpha+k)$ avec $k^2 = -\beta$

2. Résolution de l'équation $ax^2+bx+c = 0$

Pour résoudre $ax^2+bx+c = 0$

1) Repérer les coefficients de x^2 (c'est a), de x (c'est b), et le coefficient constant (c'est c).

2) Regarder …

Si on peut factoriser facilement le premier membre. Dans ce cas, mettre a en facteur et regarder l'autre facteur :

▪ a $[x^2+\frac{b}{a}x]=0$: il n'y a pas de terme constant. $ax(x+\frac{b}{a})=0$.

Les solutions sont : 0 et $-\dfrac{b}{a}$.

- a(x²–h²) =0. On a une différence de deux carrés. a(x+h)(x–h) = 0. Ainsi x +h = 0 ou x – h = 0.

  Les solutions sont : - h et h.

- a(x²+2kx+k²) = 0. C'est le développement d'un carré , l'équation s'écrit : a(x+k)² = 0,

  On a une racine double : –k.

3) Si on ne peut rien faire , calculer le discriminant $\Delta = b^2-4ac$. Il y a trois cas à envisager :

$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
L'équation est impossible **On écrit :** S = ø	**Il y a une racine double :** $x'=x''=-\dfrac{b}{2a}$ S = { x'}	**Il y a deux racines distincts :** $x'=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x''=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ S={x' ; x''}

Exemples :

Résoudre dans IR les équations suivantes :

- $x^2-9=0$

  En factorisant , on a :

  $$x^2-9=(x-3)(x+3)$$

  Donc $x^2-9=0$ si seulement si $(x-3)(x+3)=0$

  Finalement

  $x^2-9=0$ si et seulement si $x+3=0$ ou $x-3=0$.

  S = {-3 ; 3 }.

- $2x^2+6x=0$.

  En factorisant, on a $2x^2+6x=2x(x+3)$

  Donc $2x^2+6x=0$ si et seulement si $2x=0$ ou $x+3.=0$

  On a alors $x=0$ ou $x=-3$

  S = {-3 ; 0 }.

Inéquations du second degré dans IR

1. Signe du trinôme

1.1 Factorisation du trinôme

Soit f(x) = ax² + bx + c, où $a \neq 0$ .en posant $\Delta = b^2 - 4ac$, on a : f(x) = $a[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$

$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
On ne peut pas factoriser f(x) f est le produit de a par un nombre positif	Il y a une racine double : x' = x'' = - $\frac{b}{2a}$ f(x) = $a(x+\frac{b}{2a})^2$	Il y a deux racines distincts : x'= $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; x''= $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ f(x) = a (x – x') (x – x'')

1.2 Signe du trinôme

Reprenons la forme canonique de f(x) = ax² + bx + c, où $a \neq 0$. 0n a f(x) = $a[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$.

D'après le tableau ci-dessus, il y a trois cas à envisager :

- $\Delta<0$, f(x) est du signe de a pour tout x.
- $\Delta=0$, f(x) est toujours du signe de a pour tout x différent de $\frac{b}{2a}$.
- $\Delta>0$, f(x) = a (x – x') (x – x''). C'est le produit de trois facteurs dont on peut dresser facilement le tableau de signe :

x	- ∞ - 3	3	+ ∞
a	Signe de a	Signe de (- a)	Signe de a
x - x'	–	–	+
x - x''	–	+	+
f(x)	Signe de a	Signe de (- a)	Signe de a

0n peut alors énoncer les règles suivantes :

Soit f(x) = ax² + bx + c

Lorsque $\Delta<0$, f(x) est toujours,du signe de a.

Lorsque $\Delta=0$, f(x) est du signe de a (sauf quand x = - $\frac{b}{2a}$, auquel cas f(x) = 0).

Lorsque $\Delta>0$, f(x) est du signe de a, sauf si x est entre les racines auquel cas f(x) et a sont de signe contraire

2. Inéquation du second degré dans IR

2.1 Définition

Une « inéquation du second degré à une inconnue » est une inéquation qui peut se mettre sous l'une des quatre formes suivantes :

$ax^2 + bx + c > 0$

$ax^2 + bx + c \geq 0$ ou

$ax^2 + bx + c < 0$ ou

$ax^2 + bx + c \leq 0$

avec $a \neq . 0$

2.2 Résolution

Pour résoudre une telle inéquation :

0n dresse le tableau de signe de $ax^2 + bx + c$

0n hachure les colonnes avec les signes inutiles

0n écrit la solution sous forme de réunion d'intervalles

2.3 Exemples :

Résoudre dans IR les inéquations suivantes:

(1) $x^2 - x + 3 < 0$

(2) $-2x^2 + 9x - 4 > 0$

(3) $4x^2 + 28x + 49 < 0$

Solutions:

$x^2 - x + 3 < 0$	$-2x^2 + 9x - 4 > 0$	$4x^2 + 28x + 49 < 0$
a =1, b = -1, c = 3 $\Delta = b^2 - 4ac$ = -11 donc ,$x^2 - x + 3 > 0$, car a = 1 S = $\emptyset$	a =-2, b = 9, c = - 4 $\Delta = b^2 - 4ac$ = 49 x' = $\frac{1}{2}$, x'' = 4 S =] $\frac{1}{2}$; 4 [	a = 4, b = 28, c = 49 $\Delta = b^2 - 4ac$ = 0 S = $\emptyset$