Tautologie cours

1. Rappels

1.1 Proposition

1.1.1 Rappel de définition

Une proposition est une phrase qui n'a qu'une seule valeur : vraie ou bien fausse

Exemples :

- Dans l'ensemble IR,1+1 =2 est une proposition vraie.
- Les hommes peuvent être enceintes est une proposition fausse

1.1.2 Négation d'une proposition

La négation d'une proposition p notée ¬p ou $\bar{p}$ est la nouvelle proposition qui est fausse si p est vraie et vraie si p est fausse.

Exemples :

- La négation de p ,« 3 > 4 » est ¬p « 3 ≤ 4 »
- La négation de q ,« le soleil se couche à l'ouest » est ¬q « le soleil ne se couche pas à l'ouest »

1.2 Les connecteurs logiques

1.2.1 Le connecteur « et »

Pour deux propositions p et q, la proposition p et q noté p ^ q est la proposition qui est vraie si p et q le sont et fausse dans les autres cas.

Rappelons sa table de vérité

p	q	p^q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemples

15 est un multiple de 3 et 5 est une proposition vraie

7 est impair et divisible par 2 est une proposition fausse

1.2.2 Le connecteur « ou »

Pour deux propositions p et q, la proposition p ou q noté p v q est la proposition qui est fausse si p et q le sont et vraie dans les autres cas.

Rappelons sa table de vérité :

p	q	pvq
V	V	V
V	F	V
F	V	V

F	F	F

1.2.3 Le connecteur « implique »

Pour deux propositions p et q, la proposition si p alors q (p implique q) noté p => q est la proposition qui est fausse si p est vraie et q fausse , et vraie dans les autres cas.

Rappelons sa table de vérité

p	q	P=>q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

1.3 Les quantificateurs

Une proposition peut dépendre d'un paramètre x, par exemple « x est positif ». Cette proposition peut être vraie ou fausse selon la valeur de x.

1.3.1 Quantificateurs universels

Le quantificateur pour tout ou quel que soit est noté $\forall x$. La proposition $\forall x \in E$, P(x) est vraie lorsque, pour tout $x \in E$, la proposition P(x) est vraie.

Exemples :

- La proposition $\forall x \in IN$, $n \geq 0$ est vraie.
- La proposition $\forall x \geq 2$, $\sqrt{x} < x$ est fausse .

1.3.2 Quantificateurs existentiels

Le quantificateur il existe (au moins un) est noté $\exists$ La proposition $\exists x \in E$, P(x) est vraie lorsqu'il existe au moins un $x \in E$ telle que la proposition P(x) soit vraie.

Exemples :

- la proposition $\exists x \in IR$, $|x+3| = 0$ est vraie ;
- La proposition $\exists x \in IR$, $x^2+1 = 0$ est fausse

1.3.3 Négation des quantificateurs

La négation de $\forall x \in E$, P(x) est $\exists x \in E$, non P(x).

La négation de $\exists x \in E$, P(x) est $\forall x \in E$, non P(x).

Exemples :

- La négation de $\exists x \in IR$, $x + 4 = 0$ est $\forall x \in IR$ $x + 4 \neq 0$.
- La négation de $\forall x \in IR$, $x^3 \leq 0$ est $\exists x \in IR$, $x^3 > 0$

2. Tautologie

2.1 Propositions équivalentes

La proposition p <=> q est la proposition (p => q) ∧ (q => p). On lit p est équivalent à q ou bien p équivaut à q ou bien p si et seulement si q.

Table de vérité de p <=> q

p	q	p < => q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

2.2 Tautologie

En logique mathématiques, le mot « tautologie »désigne une proposition qui est toujours vraies

Exemples :

- Pour une proposition p, les propositions p v ¬p et p < => p sont des tautologie .
- « Je l’ai vu de mes propres yeux » est une tautologie
- « Je vais monter en haut »

Table de vérité de p v ¬p

p	¬p	p v ¬p
V	F	V
F	V	V

Table de vérité de p <=> q

p	p	p < => p
V	V	V
F	F	V