Divisibilité

1. Définitions

Soient a un entier relatif et d un entier non nul

On dit que a est divisible par d s'il existe un entier q tel que a = d.q

On dit aussi que a est un multiple de d, ou que d est un diviseur de a, et on note d|a.

L'ensemble des multiples de d est noté $d\mathbb{Z}$, et les multiples de d sont les nombres de la forme q.d, où q est en entier relatif. Ainsi les multiple de d sont les nombres …., -4d, -3d, -2d, -d, 0, d, 2d, 3d, 4d,….

2. Propriétés

Soient a, b et c des entiers.

- 1 divise a, - 1 divise a, et a divise 0
- a divise a, et a divise (-a)
- Si a divise b et b divise a, alors a = b ou a = -b.
- Si a divise b et b divise c, alors a divise c
- Si a divise b et a divise c, alors a divise b + c
- Si a divise b alors a divise bc

Démonstrations :

- a=a.1 et a = (-a)(-1)
- 0= a.0
- si a divise b, alors il existe un entier k tel que b = k.a

  et si b divise a, alors il existe un entier k' tel que a = k'.b

  Alors a = k'.k a , don k.k'=1. Or k et k' sont des entiers, donc k=k' = 1 ou k = k' =-1, c'est à dire b = ka= a ou ou b = ka=-a
- Si a divise b, alors il existe une entier k tel que b = k.a, et si b divise c, alors il existe un entier k' tel que c = k'.b

  Alors c = k.k' a = K.c avec K=k.k ' , ainsi a divise c.
- Si a divise b, alors il existe une entier k tel que b = k.a, et si b divise c, alors il existe un entier k' tel que c = k'.b. Alors b+c= k.a + k'.a = (k+k').a

  Puisque k + k' est un entier, a divise b+c.
- Si a divise b, alors il existe un entier k, tel que b = k.a. On a donc bc =ka.c = (k.c) a

  k.c est un entier, donc a divise bc

3. Division euclidienne

Les multiples d'un entier b sont les nombres …..-4b, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, 4b,…., avec

…..-4b < -3b < -2b < -b < 0 < b < 2b < 3b < 4b <…., si b >0 et

…<4b < 3b < 2b < b < 0 < -b < -2b < -3b < -4b <…., si b <0.

Si b = 0, alors les multiples de b sont tous égaux à 0.

Donc tout entier relatif a est soit égal à un multiple de b, soit compris entre deux multiples consécutifs b.q et b(q +1)où q est un entier relatif.

En d'autres termes, quel que soit l'entier a, il existe un entier q tel que $q.b\leq a<(q+1).b$.

Ce qui donne $0\leq a-b\cdot q<b$

En posant r = a – bq, on a a = bq+ r avec $0\leq r<b$

Théorème et définition

Pour tout entier a et tout entier non nul b, il existe un couple unique (q ;r) tel que a = bq+r avec $0\leq r<b$.

a est le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste de la division euclidienne de a par b

Remarque

Il existe plusieurs écriture de a sous la forme a = bq +r, mais il en existe une et une seule vérifiant $0\leq r<b$, et c'est la division euclidienne de a par b.

Exemple

17 = 5.3 + 2 =2.7 + 3= 2.6 + 5..

4. Critères de divisibilité

Soit N un entier naturel

On va noter $\overline{abcd}$ l'écriture décimale de l'entier naturel à 4 chiffres tel que :

- d est le chiffre des unités,
- c est le chiffre des dizaines,
- b est le chiffre des centaines,
- a est le chiffre des milliers.

Exemple

$6374=6.10^3+3.10^2+7.10^1+4.10^0$

4.1 Divisibilité par 2

Un entier naturel N est divisible par 2 si et seulement si s**on chiffre des unité est divisible par 2**, donc si c'est égal à 0, 2, 4, 6, ou 8. Ce sont les nombres pairs

4.2 Divisibilité par 3

Soit N un entier à quatre chiffres dont l'écriture dans le système décimale est abcd, $N=\overline{abcd}$.

On a $N=1000a+100b+10c+d=999a+a+99b+b+9c+c+d=999a+99b+9c+(a+b+c+d)$

$N=9(111a+11b+c)+(a+b+c+d)$

Comme 9(111a+11b+9c) est divisible par 3, N est divisible par 3 si et seulement si a+b+c+d est divisible par 3 . Ce résultat est vrai quel que soit le nombre de chiffre de N. Ainsi

Un entier est divisible par 3 si et seulement si **la somme de ses chiffres est divisible par 3.**

4.3 Divisibilité par 4

$$N=\overline{abcd}$$

$$N=1000a+100b+10c+d=100(10a+b)+10c+d$$

100(10a+b) est divisible par 4, puis que 100 est divisible par 4. Ainsi N est divisible par 4 si et seulement si 10c+d est divisible par 4.

Alors

Un entier naturel est divisible par 4 si et seulement si le **nombre formé par les deux derniers chiffres** est divisible par 4.

Exemple

N = 2476

76 = 4x19. Donc N est divisible par 4

4.4 Divisibilité par 5

Un entier naturel est divisible par 5 si et seulement si son **chiffre des unités** est 0 ou 5.

4.5 Divisibilité par 6 , par 12, par 15, et par 18

Soit d = ab où a et b sont des entiers naturel premiers entre eux (c'est-àdire que a et b n'ont aucun diviseur commun)
Alors un entier naturel est divisible par d si et seulement si il est divisible par *a* et par *b*.
Alors

- Un entier naturel est divisible par 6 si et seulement si il est divisible par 2 et par 3.
- Un entier naturel est divisible par 12 si et seulement si il est divisible par 3 et par 4,
- Un entier naturel est divisible par 15 si et seulement si il est divisible par 3 et par 5,
- Un entier naturel est divisible par 18 si et seulement si il est divisible par 2 et par 9, etc.