

## Fonctions rationnelles

**Etudiez les variations de la fonction f et tracez sa courbe représentative.**

1.  $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$

$f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

2.  $f(x) = \frac{x}{x-2}$

$f(x) = \frac{4x-3}{2x}$

3. 1° Déterminez les réels b, c, d pour que la courbe représentative C de la fonction  $f: x \rightarrow \frac{x+b}{cx+d}$  coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -1, coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -1 et passe par le point A(2 ; 3).

2° Construisez C.

3° Déterminez les points d'intersection de C avec la droite D d'équation  $y = x$ .  
Construisez les tangentes à C en ces points.

4. 1° Déterminez les réels a, b, c, d pour que la courbe représentative C de la fonction  $f: x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$  passe par les points A(1 ; 0); B(-1 ; -2) ; D(2 ; 4).

2° Construisez C et les tangentes en A et D.

3° Déterminez les points d'intersection de C avec la droite  $\Delta$  d'équation  $y = -x - 1$ .  
Construisez les tangentes à C en ces points.

5.  $f(x) = 2x - 1 + \frac{2}{x-3}$ . Vérifiez que la droite d'équation  $y = 2x - 1$  est asymptote oblique.

6.  $f(x) = -x + 2 + \frac{1}{x}$ . Vérifiez que la droite d'équation  $y = -x + 2$  est asymptote oblique.

7.  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$ . Vérifiez que la droite d'équation  $y = x + 1$  est asymptote oblique.

8. f est la fonction  $x \mapsto x + 3 - \frac{1}{x}$

a) Etudiez f.

b) Déterminez les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  de la fonction g définie par  $g(x) = f(x) - (x + 3)$ .  
Qu'en déduisez-vous ?

c) Déterminez les équations des tangentes à la courbe C représentant f aux points d'abscisses 1 et -1.

d) Tracez ces tangentes et C.

9. a et b sont deux réels et f est la fonction :

$$x \mapsto ax + b + \frac{1}{3-x}$$

a) Déterminez l'ensemble de définition de f.

b) Sachant que  $f(2) = 1$  et  $f'(2) = 0$ , montrer que  $a = -1$  et  $b = 2$ .

c) Démontrez que la droite d'équation  $y = -x + 2$  est asymptote à C, courbe représentative de f.

d) Etudiez les variations de f.

- e) Montrez que le point d'intersection des asymptotes de C est centre de symétrie de C.  
 f) Construisez C dans un repère orthonormé.

**10.** f est la fonction  $x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ .

1. Déterminez les réels a, b et c tels que, pour tout réel  $x \neq 1$ , on ait :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}.$$

2. Etudiez f ; vérifiez que la dérivée s'annule pour  $x = -1$  et  $x = 3$ .  
 3. Expliquez pourquoi la droite d'équation  $y = x - 2$  est asymptote oblique à la courbe C représentant f ; puis tracez C.  
 4. Montrez que C admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation  $y = -3x$ .  
 Calculez les coordonnées de chacun des points de contact et écrivez l'équation de chacune de ces tangentes.

**11.** f est la fonction  $x \mapsto x + \frac{1}{x - 1}$ .

- a) Quel est l'ensemble de définition de f ?  
 Etudiez les variations de f.  
 b) Vérifiez que les droites d'équations  $x = 1$  et  $y = x$  sont asymptotes à la courbe C représentant f.  
 c) Construisez C dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).  
 d) Soit O' le point d'intersection des asymptotes de C. Montrez que O' est centre de symétrie de C.  
 e) Déterminez l'équation de la droite D tangente à C au point d'abscisse -1.  
 Montrez que C admet une autre tangente D' parallèle à D. Déterminez les coordonnées du point commun à D' et à C.

**12.** Une entreprise fabrique un produit et les charges variables, notées C(q), dépendent de la quantité q d'articles fabriqués ; ces charges sont données en milliers de francs par :

$$C(q) = q^2 - 20q + 400.$$

1. Quelles sont les valeurs possibles pour q ?  
 Calculer les charges pour la fabrication de 10 articles, de 20 articles.  
 2. Déterminer la quantité d'articles à fabriquer pour avoir des charges minimales.  
 Représenter graphiquement la fonction C.

3. Les charges moyennes unitaires, notées  $C_m(q)$ , sont définies par  $C_m(q) = \frac{C(q)}{q}$ .

Déterminer la quantité d'articles à fabriquer pour avoir des charges moyennes unitaires minimales.

Représenter graphiquement la fonction  $C_m$ .

4. Cette entreprise vend 10000F chaque article fabriqué. Déterminer le bénéfice brut B(q) de cette entreprise en fonction de q.

Déterminer q pour que ce bénéfice soit maximal.

Représenter graphiquement la fonction B.

**13.** Pour définir les longueurs moyennes de freinage d'une automobile sur une route ayant un bon revêtement, dans des conditions climatiques normales, on a adopté la formule :

$$d = \frac{v^2}{290 - v}$$

qui donne la distance de freinage en mètres en fonction de la vitesse en km/h.

- 1- Etudier les variations de la fonction f définie sur  $[40 ; 130]$  par  $f(v) = d$ .

- 2- Construire la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  convenablement choisi.
- 3- Déterminer graphiquement la vitesse à ne pas dépasser pour s'arrêter sur moins de 50 mètres. Vérifier par le calcul.