Applications de la dérivée

1. Approximation de f au voisinage de x_0

Considérons le développement limité d'ordre 1 de f au voisinage de x_0 :

$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0).h+h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$.

Lorsque h tend vers 0, $f(x_0+h)\approx f(x_0)+f'(x_0).h$. Donc $f(x_0)+h\,.\,f'(x_0)$ est une bonne approximation de $f(x_0+h)$ au voisinage de x_0.

Exemples : $f(x)=\sqrt{x}$. On a $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

$f(1,1) = f(1+ 0,1)$

$f(x_0+h)\approx f(x_0)+f'(x_0).h$, donc $\sqrt{1,1}\approx 1+\dfrac{1}{2}.0,1$

2. Sens de variation

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

. Si quel que soit $x\in I$, $f'(x)\geq 0$ alors f est croissante sur I

. Si quelque soit $x\in I$, $f'(x)\leq 0$ alors f est décroissante sur I

. Si quel que soit $x\in I$, $f'(x)=0$ alors f est constante sur I

.Si l' inégalité est stricte. f est strictement croissante (respectivement décroissante)

3. Extremums relatifs

Théorème

Si f est dérivable sur I ouvert, et $x_0\in I$, et si f admet un extremum en x_0, alors $f'(x)=0$

La réciproque n'est pas vraie

Exemple

$f(x)=x^3$

$f'(x)=3x^2$

f ' (0)=0 mais on n'a ni maximum, ni minimum en 0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		+	0	+	
$f'(x)$		↗	0	↗	

Théorème

f admet un extremum en x_0 si et seulement si f ' s'annule et change de signe en x_0

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗		↘	

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	

4. Sens de concavité – Point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.

. si $f''(x) \geq 0$ quel que soit $x \in I$, alors (ζ_f) tourne sa concavité vers les y positifs

. si $f''(x) \leq 0$ quel que soit $x \in I$, alors (ζ_f) tourne sa concavité vers les y négatifs.

On appelle point d'inflexion un point de la courbe qui sépare deux parties de la courbe de sens de concavité différents.

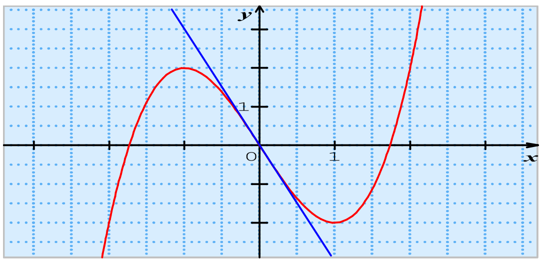
$M_0(x_0\,;\,f(x_0))$ est un point d'inflexion si et seulement si f'' s'annule et change de signe en x_0.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	

ou

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

En un point d'inflexion, la tangente coupe la courbe.



Le point O (0 ;0) est un point d'inflexion