Fonctions numériques: généralités

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions définies par les expressions suivantes :

$f(x)=x^2-3x+2$ $\qquad f(x)=x^5+\frac{x^3-1}{3}-2x\frac{x^2-3x+2}{8}$ $\qquad f(x)=\frac{x-4}{x^2-3x+2}$

$f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$ $\qquad f(x)=\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}$ $\qquad f(x)=\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{2x-3}$

$f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x-3}}$ $\qquad f(x)=\frac{\sqrt{x^2-3x+2}+x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ $\qquad f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x+1-\sqrt{x+3}}$

$f(x)=\frac{(x-4)\sqrt{-x^2+3x-2}}{2x^2-5x+3}$ $\qquad f(x)=\sqrt{2x^2-5x+3}-\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$

Exercice 2

1°) Dans chacun des cas suivants :

– Déterminer l'ensemble de définition Df de f

– Etudier la parité de f

– Représenter graphiquement f

a) $f(x)=x$ b) $f(x)=-x$ c) $f(x)=x^2$ d) $f(x)=-x^2$

e) $f(x)=x^3$ f) $f(x)=-x^3$ g) $f(x)=\frac{1}{x}$ h) $f(x)=-\frac{1}{x}$

2°) Mêmes questions avec :

a) $f(x)=ax$ b) $f(x)=ax^2$ c) $f(x)=ax^3$ d) $f(x)=\frac{a}{x}$

(Remarque : distinguer les deux cas $a>0$ et $a<0$)

3°) Représenter graphiquement les fonctions définies par les expressions suivantes :

a) $f(x)=2x$ b) $f(x)=-3x$ c) $f(x)=2x^2$ d) $f(x)=-3x^2$ e) $f(x)=\frac{1}{2}x^3$

f) $f(x)=-2x^3$ g) $f(x)=\frac{2}{x}$ h) $f(x)=-\frac{3}{x}$ i) $f(x)=-\frac{x^2}{2}$ j) $f(x)=\frac{3}{x}$

k) $f(x)=\frac{1}{2x}$ l) $f(x)=-\frac{3}{2x}$

Exercice 3

1°) Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel x , on ait l'égalité :

$$-x^3+6x^2-12x=-(x-a)^3+b$$

2°) Soit (C) la courbe d'équation $(C): y=-x^3$, (C') la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x)=-x^3+6x^2-12x$

Montrer que (C') est l'image de (C) par une transformation simple à déterminer puis tracer (C) et (C')

3°) Tracer les deux courbes $(C_1): y=x^3-6x^2+12x-8$ et , $(C_1): y=|g(x)|$

COMPARAISON DE FONCTIONS

Exercice 4

Soient f et g les deux fonctions définies par $f(x)=x^2$ et $g(x)=x+2$

1°) Tracer dans un même repère les deux courbes $(Cf): y=f(x)$ et $(Cg): y=g(x)$

2°) Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$

Interpréter graphiquement les solutions de cette équation

3°) Etudier le signe de $f(x)-g(x)$

Interpréter graphiquement ce tableau de signe

Exercice 5

Soient f et g les deux fonctions définies par $f(x)=x^2$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$

1°) Tracer dans un même repère les deux courbes $(Cf): y=f(x)$ et $(Cg): y=g(x)$

2°) Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$

Interpréter graphiquement les solutions de cette équation

3°) Etudier le signe de $f(x)-g(x)$

Interpréter graphiquement ce tableau de signe

Exercice 6

Soient f et g les deux fonctions définies par $f(x)=\dfrac{2(x+1)}{x}$ et $g(x)=x^2-1$

1°) a) Trouver les deux réels k et b tels que pour tout $x\neq 0$, $f(x)=\dfrac{k}{x}+b$

b) Quelle relation lie la courbe $(Cf): y=f(x)$ et l'hyperbole $(H): y=\dfrac{k}{x}$?

2°) Quelle relation lie la courbe $(Cg): y=g(x)$ et la parabole $(P): y=x^2$?

3°) a) Exprimer $f(x)-g(x)$ sous forme de fraction rationnelle

b) Etudier le signe de $f(x)-g(x)$

4°) a) Quels sont les points d'intersection de (Cf) et (Cg) ?

b) Dans quelle partie du plan (Cf) se trouve-t-elle au dessus de (Cg) ?

5°) Représenter graphiquement (Cf) et (Cg)

Exercice 7

Soient f et g les deux fonctions définies par $f(x)=\dfrac{-x+1}{x+1}$ et $g(x)=x^2+2x-3$

1°) Factoriser le polynôme $P(x)=x^3+3x^2-4$ puis étudier son signe

2°) a) Trouver les points d'intersection des deux courbes

$(Cf): y=f(x)$ et $(Cg): y=g(x)$

b) Etudier le signe de $f(x)-g(x)$. Que dire des deux courbes (Cf) et (Cg) ?

3°) a) Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=\dfrac{k}{x-\alpha}+\beta$ $(k, \alpha, \beta \in IR)$

Donner une relation entre la courbe (Cf) et l'hyperbole $(H): y=\dfrac{2}{x}$

4°) a) Ecrire $g(x)$ sous forme canonique

b) Donner une relation entre la courbe (Cg) et le parabole $(P): y=x^2$

5°) a) Préciser les points d'intersection de (Cf) et (Cg) avec l'axe $(x'Ox): y=0$

b) Préciser les points d'intersection de (Cf) et (Cg) avec l'axe $(y'Oy): x=0$

6°) Représenter dans le même repère $R(O,\vec{i},\vec{j})$ les deux courbes (Cf) et (Cg)

Exercice 8

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=x^2-4x+5$

On note (D_m) la droite d'équation $(D_m): y=m$

1°) a) Pour quelles valeurs de m, l'équation $f(x)=m$ admet-t-elle deux solutions ?

b) Interpréter graphiquement

2°) Pour quelle valeur m_0 de m, la courbe (Cf) coupe-t-elle une seule fois la droite (D_m) ?

3°) Ecrire $f(x)$ sous forme canonique puis tracer (Cf) et (D_{m_0}) dans un même repère.

Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=x^2-2x+3$

1°) Ecrire $f(x)$ sous forme canonique puis représenter f graphiquement

On considère la droite $(D_m): y=2x+m$ $(m \in IR)$

2°) Pour quelles valeurs de m, (Cf) coupe-t-elle deux fois la droite (D_m) ?

3°) a) Pour quelle valeur m_0 de m, (Cf) coupe-t-elle une seule fois la droite (D_m) ?

b) Trouver le point d'intersection de (Cf) avec (D_{m_0})

4°) Tracer dans le même repère que (Cf) la droite (D_{m_0})

Exercice 10

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

1°) a) Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=\dfrac{k}{x-\alpha}+\beta$, k, α et $\beta \in IR$

b) Quelle relation lie la courbe $(Cf): y=f(x)$ et l'hyperbole $(H): y=\dfrac{1}{x}$

c) Tracer (Cf) dans le repère $R(O,\vec{i},\vec{j})$

On considère, pour tout $m \in IR$, la droite $(D_m): y=m-x$

2°) Montrer que l'équation $f(x)=m-x$ est équivalente à une équation du 2nd degré à déterminer.

3°) Pour quelles valeurs de m cette équation admet-t-elle deux solutions ?

4°) Pour quelles valeurs m_1 et m_2 de m, cette équation admet-t-elle une seule solution ?

5°) a) Préciser le point d'intersection de (Cf) avec (D_{m_1}) puis tracer (D_{m_1})

b) Préciser le point d'intersection de (Cf) avec (D_{m_2}) puis tracer (D_{m_2})

Exercice 11

Soit f_m la fonction numérique définie par $f_m(x)=\dfrac{m(2-x)}{x-1}$, $m \in IR$

On note (C_m) la courbe représentative de f_m, et (D_m) la droite d'équation $(D_m): y=4-mx$

1°) Montrer que l'équation $f_m(x)=4-mx$ est équivalente à une équation du 2nd degré à déterminer

2°) Pour quelles valeurs de m, (C_m) ne coupe-t-elle jamais la droite (D_m) ?

3°) Pour quelles valeurs m_1 et m_2 de m, (C_m) coupe-t-elle une seule fois (D_m) ?

4°) a) Ecrire $f_{m_1}(x)$ sous forme canonique

b) Tracer (C_{m_1}) et (D_{m_1}) dans un même repère

5°) a) Ecrire $f_{m_2}(x)$ sous forme canonique

b) Tracer (C_{m_2}) et (D_{m_2}) dans un même repère

Exercice 12

On considère la fonction f_m définie par $f_m(x)=(1-m)x^2+2mx$

On note (C_m) la courbe représentative de f_m dans $R(O,\vec{i},\vec{j})$

et (D_m) la droite d'équation $(D_m): y=mx+1$

I – On se propose de résoudre l'équation $(E): f_m(x)=mx+1$

1°) Montrer que (E) est équivalente à une équation du 2nd degré à déterminer

2°) Calculer le discriminant Δ du trinôme concerné puis étudier son signe

3°) Pour quelles valeurs de m (E) admet-t-elle deux solutions distinctes ? Exprimer ces solutions en fonction de m

Que dire de (C_m) et (D_m) pour ces valeurs de m ?

4°) Pour quelle valeur m_0 de m, (E) admet-t-elle une seule solution ?

En quel point (C_{m_0}) coupe-t-elle (D_{m_0}) ?

II – On prend $m = 2$

1°) Expliciter $f_2(x)$, puis l'écrire sous forme canonique

2°) Quelle relation lie la courbe (C_2) et le parabole $(P): y = -x^2$

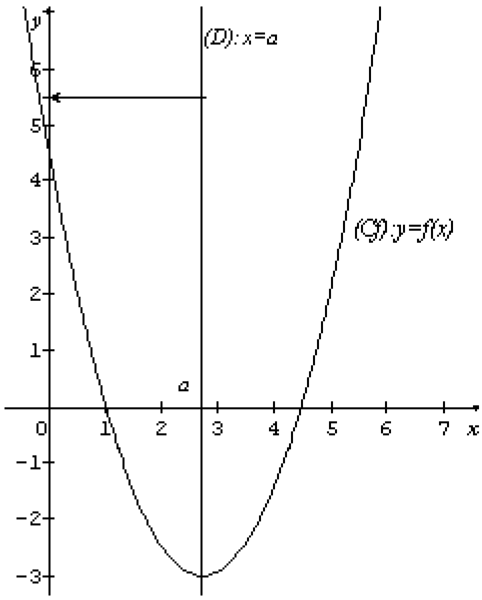
3°) Tracer dans un même repère (C_2) et (D_2)

– ELEMENTS DE SYMETRIE –

Exercice 13

I – Rappeler le comportement de la courbe $(C): y = F(x)$ si F est paire, impaire.

II – Soient f une fonction dont la courbe représentative (Cf) est symétrique par rapport à la droite $(D): x = a$



et g la fonction numérique définie par $g(x) = f(x+a)$

1°) Tracer la courbe $(Cg): y = g(x)$. Comment se comporte t-elle ?

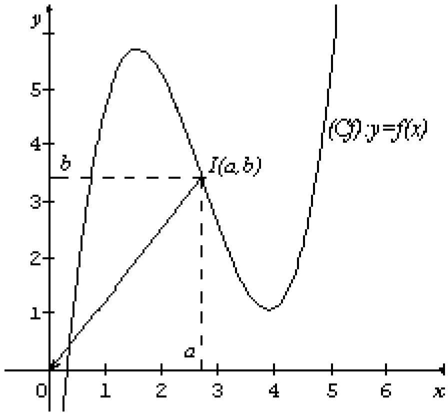
2°) Que dire alors de la fonction g ? Interpréter analytiquement

3°) Ecrire une condition pour que la droite $(D): x = a$ soit un axe de symétrie pour (Cf)

4°) Poser $y = a - x$, exprimer $a + x$ en fonction de a et y

5°) Réécrire la condition pour que la droite $(D): x = a$ soit un axe de symétrie pour (Cf)

III – Soient f une fonction dont la courbe représentative (Cf) est symétrique par rapport au point $I(a;b)$



et g la fonction numérique définie par $g(x) = f(x+a) - b$

1°) Tracer la courbe $(Cg): y = g(x)$. Comment se comporte t-elle ?

2°) Que dire alors de la fonction g ? Interpréter analytiquement

3°) Ecrire une condition pour que le point $I(a,b)$ soit un centre de symétrie pour (Cf)

4°) Poser $y = a - x$, exprimer $a + x$ en fonction de a et y

5°) Réécrire la condition pour que le point $I(a,b)$ soit un centre de symétrie pour (Cf)

IV – Montrer que :

1°) $(D): x = 1$ est un axe de symétrie pour $(Cf): y = 2x^2 - 4x + 5$

2°) $I(2;1)$ est un centre de symétrie pour $(Cf): y = \dfrac{x}{x-2}$

3°) $I(-2;2)$ est un centre de symétrie pour $(Cf): y = 2\dfrac{x+1}{x+2}$

4°) $(D): x = \dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour $(Cf): y = \dfrac{4x^2 - 4x - 3}{4x^2 - 4x + 5}$

5°) $I(1;3)$ est un centre de symétrie pour $(Cf): y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

6°) $I(2;-1)$ est un centre de symétrie pour $(Cf): y = \dfrac{x^2 - 5x + 5}{x - 2}$