Système linéaire dans IR^3 et dans IR^4

1. Système de trois équations à trois inconnues.

Soit à résoudre le système :

$$(S)\quad \begin{cases} ax+by+cz= \quad d \quad (L_1) \\ a'x+b'y+c'z=d'(L_2) \\ a''x+b''y+c''z=d''(L'_3) \end{cases}$$

La meilleure méthode (et c'est celle du programme) est celle dite de Gauss

1.1 Définitions

- Deux *systèmes d'équations* (S) et (S') sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions, autrement dit, si toute solution de (S) est solution de (S') et réciproquement.

- On appelle *opérations élémentaires* sur les lignes de (S) :

- l'échange des lignes i et j notée L_i « L_j

- la multiplication de la ligne i par un réel l (l¹0) notée L_i ¬ l L_i

- l'addition à la ligne i d'un multiple de la ligne j notée L_i ¬ L_i +l L_j

1.2 Théorème

On obtient un système (S') équivalent à (S) :

- en effectuant une opération élémentaire sur les lignes de (S)
- en supprimant dans (S) deux lignes identiques
- en changeant l'ordre des inconnues de (S) i.e. en échangeant deux colonnes de (S).

1.3 Méthode de Gauss

Cette méthode consiste à transformer, par combinaisons linéaires, le système initial de façon à aboutir à un système simple à résoudre par substitutions.

Description de la méthode :

1ère étape : Elimination

On élimine à l'aide de (L_1) une des inconnues, par exemple x dans L_2 et L_3

On obtient alors un système (S') équivalent à (S), de la forme

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \qquad (L_1) \\ \quad b'_1y+c'_1z=d'_1 \qquad (L'_2) \\ \quad b''_1y+c''_1z=d''_1 \quad (L'_3) \end{cases}$$

2e étape :

A l'aide de (L'_2) on élimine dans (L'_3) l'une des inconnues. On obtient alors un système de la forme :

$$\begin{cases} ax+by+cz \quad =d \qquad (L_1) \\ \quad b'_1y+c'_1z=d'_1 \qquad (L'_2) \\ \qquad c''_2z=d''_2 \quad (L''_3) \end{cases} \quad \text{équivalent à (S')}$$

<u>3e étape</u> : substitution remontante

On détermine z à partir de (L"$_3$), puis on substitue dans (L"$_2$)

On refait les mêmes opérations pour y et x.

Exemple :

Résoudre dans IRXIRXIR le système : $\begin{cases} x+y+z=3 & (L_1) \\ x-y+2z=2 & (L_2) \\ x-2y-z=-2 & (L_3) \end{cases}$

Réponse :

$$\begin{cases} x+y+z=3 & (L_1) \\ 2y-z=1 & (L'_2) \\ 3y+2z=5 & (L'_3) \end{cases}$$

$$(3L'_2\text{-}2L'_3) \longrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y-z=1 \\ -7z=-7 \end{cases}$$

Ce qui donne $\begin{cases} z=1 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases}$

d'où, l'ensemble de solution est $S=\{(1;1;1)\}$

Remarque :

Dans la deuxième étape, si on aboutit à une égalité de la forme 0.z=0, on prend z comme paramètre en posant z = k, et on exprime les autres inconnues en fonction de ce paramètre. On a alors une infinité de solutions.

Exemple

Résoudre le système $\begin{cases} x-2y+2z=1(L_1) \\ x+y-3z=2(L_2) \\ 2x-y-z=3(L_3) \end{cases}$

Éliminons x dans les deux dernières équations avec (L$_1$). On obtient le système

$$\begin{cases} x-2y+2z=1(L_1) \\ -3y+5z=-1(L'_2) \\ -3y+5z=-1(L'_3) \end{cases}$$

On voit que les deux équations obtenues sont égales, donc si on élimine y, on a

$$\begin{cases} x-2y+2z=1(L_1) \\ -3y+5z=-1(L'_2) \\ 0.z=0(L''_3) \end{cases}.$$

On pose z= k. D'après l'équation (L'$_2$) on a $y=\frac{1+5k}{3}$

et d'après l'équation (L$_1$), $x=\frac{5+4k}{3}$

Et l'ensemble des solutions est $S=\left\{\left(\frac{5+4k}{3}, \frac{1+5k}{3}, k\right), k\in\mathbb{R}\right\}$.

Pour chaque valeur de k, on a une solution. Ainsi on a une infinité de solutions.

Si on aboutit à une équation de la forme 0.z = d''$_3$, où $d''_3\neq 0$, le système n'admet aucune solution.
Exemple :

Résoudre $\begin{cases} x-2y+2z=1 (L_1) \\ x+y-3z=2 (L_2) \\ 2x-y-z=1 (L_3) \end{cases}$

Éliminons x dans les équations (L_2) et (L_3), on obtient le système

$$\begin{cases} x-2y+2z=1 (L_1) \\ -3y+5z=-1 (L'_2) \\ -3y+5z=3 (L'_3) \end{cases}$$

En éliminant y dans la dernière équation avec (L'$_2$) , on a le système

$$\begin{cases} x-2y+2z=1 (L_1) \\ -3y+5z=-1 (L'_2) \\ 0.z=-4 (L''_3) \end{cases}$$ qui ne donne aucune solution

D'où l'ensemble des solutions est $S=\emptyset$

2. Système de quatre équations à quatre inconnues

La méthode de Gauss peut être appliquée à tout système linéaire de n équations à n inconnues quel que soit l'entier $n\geq 3$

Exemple pour un système de quatre équations à 4 inconnues

Résoudre le système $\begin{cases} 2x-y+z-t=2 (L_1) \\ x+2y-z+t=3 (L_2) \\ 3x-y+z+t=1 (L_3) \\ -x+y+2z+t=2 (L_4) \end{cases}$

Résolution

$$\begin{cases} 2x-y+z-t=2 & (L_1) \\ -5y+3z-3t=-4 & (L_1-2L_2) \\ -y+z-5t=4 & (3L_1-2L_3) \\ y+5z+t=6 & (L_1+2L_4) \end{cases}$$

En procédant comme précédemment avec les trois dernières équations, on obtient l'ensemble des solutions $S=\{(1;2;1;-1)\}$.