TP : Programmation linéaire

De nombreux problèmes du monde de la production et de la consommation se résument de la façon suivante : comment utiliser au mieux des ressources qui existent en quantité limitée ? Naturellement, on ne peut pas répondre de façon précise à une question aussi générale. Il faut d'abord exprimer ce qu'on entend par le fait d' ''utiliser au mieux'' donc définir un objectif, de même qu'il faut définir les limitations des ressources ou contraintes qui sont imposées. Il y a naturellement beaucoup de façons différentes d'exprimer des ''objectifs'' et des contraintes.
La programmation linéaire est une des méthodes qui permet de résoudre de tels problèmes.

1. Définition

Un programme linéaire est un système formé de fonction linéaire de plusieurs variables dont on recherche l'optimum et d'un ensemble de *contraintes linéaires* sur ces variables.
La fonction linéaire dont on recherche le maximum ou le minimum porte les noms de *fonction objectif* ou *fonction économique*.
Résoudre un programme linéaire consiste à rechercher, parmi toutes les valeurs des variables qui satisfont les contraintes, celles qui optimisent la fonction objectif.

Exemple 1 : Soit le système

$$\begin{cases} \textit{Maximiser} \quad x+2y \\ x \geq 0, y \geq 0 \\ 2x+3y \leq 4 \\ x+y \geq 1 \\ x+4y \leq 10 \end{cases}$$

C'est un programme à deux variables et trois contraintes principales, $x \geq 0$ et $y \geq 0$ sont des contraintes de signes. Le problème posé est un maximisation sous contraintes.

2. Résolution d'un système linéaire

Exemple : *Un artisan fabrique deux articles A et B nécessitant une opération d'usinage. Il possède un stock hebdomadaire de 100 kg de matières premières. Toutes les semaines, l'artisan peut disposer de la machine d'usinage pendant 21 h.*
Par ailleurs, la fabrication :
- d'un article A demande 600 grammes de matières premières et 10 mn de fabrication.
- d'un article B demande 900 grammes de matières premières et 10 mn de fabrication.
Quelles quantités de A et de B, l'artisan doit-il fabriquer par semaine pour respecter les différentes contraintes de production et maximiser sa marge, si la

marge bénéficiaire qu'il peut dégager et de 3000 F pour un article A et 4000 F pour un article B ?

2.1 Écriture du programme linéaire

i) On présente les données de l'énoncé sous forme de tableau.

	article A	article B	disponibilité maximum
Usinage	10 mn	10 mn	21 h
Matières premières	600 g	900 g	100 kg
Marge	3 000 F	4 000 F	

ii) *Choix des inconnues*
Appelons x la quantité d'articles A à fabriquer et y la quantité d'articles B à fabriquer par semaine. x et y sont les *niveaux d'activités* et le couple (x, y) le *programme de fabrication ou programme de production*.

iii) *Ecriture de la fonction économique*
C'est la fonction dont on recherche le maximum (ou le minimum). Ici, il s'agit de maximiser la marge dégagée par de x articles de A et y articles de B.
C'est donc la fonction F(x, y) = 3000 x + 4000 y.

iv) *Ecriture des contraintes*
. x et y désignent des quantités. On a donc x ≥ 0 et y ≥ 0.
. On ne peut pas utiliser la machine plus de 21 h. On a donc une contrainte économique d'usinage :

10 x + 10 y ≤ 1260

(10 x + 10 y représentant le temps d'usinage pour x articles de A et y articles de B)
. De même, on écrit une contrainte économique de matière première :

600 x + 900 y ≤ 100 000

v) *Ecriture du programme linéaire* :

$$\begin{cases} Maximiser\ \ 3000x + 4000y \\ x \geq 0 \ et \ y \geq 0 \\ x + y \leq 126 \\ 0{,}6x + 0{,}9 \leq 100 \end{cases}$$

Le problème à résoudre est le suivant : on recherche un couple (x, y) (ici, programme de fabrication), satisfaisant aux contraintes (ici, contraintes économiques de fabrication) et pour lequel la marge dégagée F atteint une valeur maximale.

Remarque
On pourrait ajouter ici que x et y ne peuvent prendre que des valeurs entières. Cette condition n'apparaît pas lors de la résolution du problème.

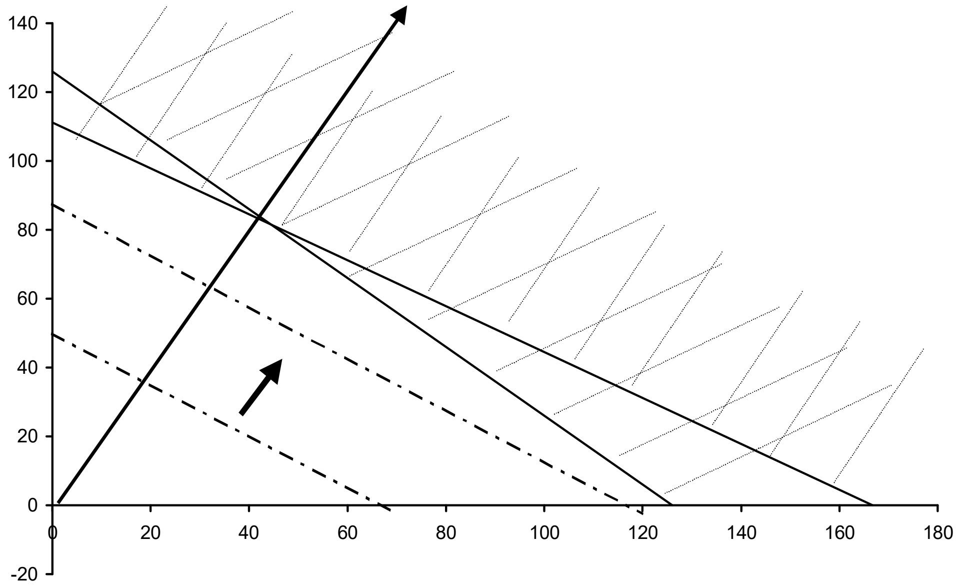
Quand les solutions théoriques s'expriment par des nombres non entiers, on retient les valeurs arrondies aux entiers les plus proches, de façon compatible avec les contraintes.

2.2 Résolution graphique du programme linéaire

i) ***Construction du domaine des solutions réalisables***
C'est l'ensemble des points solutions du système d'inéquations.
Soit D_1 et D_2 les droites d'équations respectives :

$x + y = 126$ et $0{,}6\,x + 0{,}9\,y = 100$

Le schéma correspondant est alors :

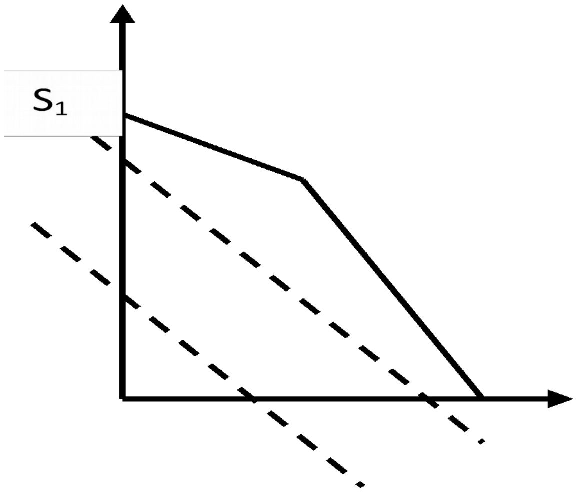


Chaque programme de production (x, y) peut être représenté par le point M de coordonnées (x, y) dans un plan muni d'un repère orthonormé. Les diverses contraintes correspondent alors à l'obligation faite au point M d'appartenir simultanément à un certain nombre de demi-plans, soit en définitive, le polygone $OS_1S_2S_3$.
Dans le cas où les inégalités sont écrites au sens large, les côtés font partie de ✍✉

ii) **Maximisation de la fonction économique**
L'ensemble des solutions possibles étant trouvé, il s'agit maintenant de trouver, parmi tous ces points, celui (ou ceux) qui donne à la fonction
$F(x, y) = 3000\,x + 4000\,y$ sa valeur maximale.

. Tracé d'une droite de référence
Lorsque le point M décrit la droite d'équation $3000\,x + 4000\,y = k$ (ou, plus précisément, la partie de cette droite contenue dans le domaine des solutions réalisables), le bénéfice est constant et égal à k. Cette droite est une *courbe de niveau* de la fonction économique.
Il apparaît ainsi une solution graphique justifiée par les rappels de géométrie :
- déplacer une droite d'égal bénéfice parallèlement à elle-même puisque les coefficients 3000 et 4000 ne changeront pas.
- n'accepter que les positions telles que la droite rencontre le domaine Δ puisque seuls les points de Δ correspondent à des programmes de production qui vérifient les contraintes.
- chercher la position telle que la distance à l'origine soit maximum puisqu'on cherche le maximum.

Par exemple, sur la figure ci-dessus est tracée la droite D d'équation :
$3000\,x + 4000\,y = 250\,000$.



Le segment [AB] est donc l'ensemble de toutes les solutions réalisables i.e. toutes les productions possibles, conduisant à un bénéfice total de 250 000 F.
Lorsque k varie, les courbes de niveau, d'équation 3000 x + 4000 y = k, forment une famille de droites parallèles de pente $-\frac{3000}{4000} = -\frac{3}{4}$.

Lorsqu'on augmente la valeur de du bénéfice k, D va se déplacer parallèlement à elle-même vers le haut.

. Recherche de la "meilleure droite"
Il suffit donc de tracer une courbe de niveau quelconque, de la déplacer parallèlement à elle-même "vers le haut" tant qu'elle rencontre 👎.
On s'aperçoit que la position optimale de D, soit D*, est celle pour laquelle la courbe de niveau coupe 👎 en un seul point, ici le sommet S_2 : intersection de D_1 et D_2.
La solution optimale a donc pour coordonnées la solution du système formé par les équations D_1 et D_2, soit :

$$\begin{cases} x + y = 126 \\ 0{,}6x + 0{,}9y = 100 \end{cases}$$

La solution est x = 44,6   et y = 81,3
Comme x et y sont des entiers, on vérifie que x = 45 et y = 81 est la solution optimale. D'où, F = 3000 . 45 + 4000 . 81 =459 000 F.

Conclusion
Le programme de production optimale est celui qui consiste à fabriquer 45 unités de A et 81 unités de B.
Le bénéfice correspondant est F*=459 000F
Ce programme de production utilise complètement les heures disponibles pour la machine d'usinage (cette ressource est dite *rare*). On n'utilise que 99,9 kg de matières premières (cette ressource non complètement utilisée est dite en *surabondance*).

Remarques

- Si les contraintes d'un programme linéaire sont incompatibles, le domaine 👎 des solutions réalisables est vide : le programme linéaire n'a alors aucune solution.
- Si le domaine 👎 est ouvert vers le haut, un problème de maximisation n'a aucune solution, la droite de référence pouvant indéfiniment se déplacer vers le haut.
- La solution optimale, si elle existe, se trouve toujours sur au moins un sommet de 👎.
- Si les coordonnées du point S trouvé comme solution ne sont pas entières, il est nécessaire de rechercher un point de 👎 à coordonnées entières proche de S.
- Si la droite de référence est parallèle à l'un des côtés de 👎, le problème a une infinité de solutions : c'est l'ensemble des points de ce côté.

3. Autres problèmes

3.1 Résolution graphique de minimisation

La méthode de résolution d'un programme linéaire de minimisation est identique à celle employée pour la résolution d'un programme linéaire de maximisation. La seule différence est le déplacement de la droite de référence : il s'effectue vers le bas, en se rapprochant de O.

3.2 Analyse de sensibilité

Un programme linéaire est résolu à partir de données précises concernant
les coefficients de la fonction économique et des contraintes.
On peut se demander ce que serait la solution si l'un des coefficients variait.
Le programme de fabrication changerait-il si le nombre d'heures disponibles sur la machine augmentait ou diminuait.
Ces deux questions trouvent une réponse en effectuant une *analyse de sensibilité,* par rapport à la fonction économique pour la première question, par rapport aux contraintes pour la deuxième question.

3.3 Méthode analytique

La méthode graphique exposée précédemment impose une représentation dans le plan du domaine de solutions réalisables. Elle est facilement applicable lorsque le problème comporte deux variables, elle devient impossible à appliquer lorsque le nombre de variables dépasse trois. Or, dans la pratique, il n'est pas rare de travailler sur un nombre de variables élevé. On a recours alors à une méthode analytique.