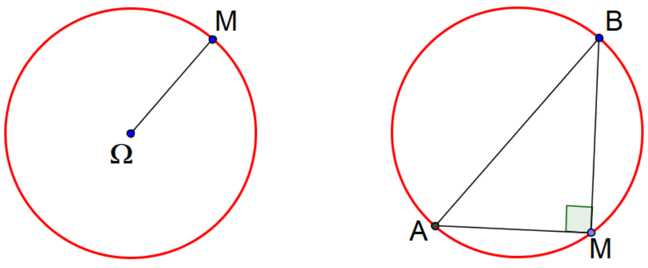
CERCLES

1. Définitions

Le cercle (C) de centre Ω de rayon r est l'ensemble des points M du plan vérifiant ΩM = r.

(C) = { M / ΩM = r }

Le cercle de diamètre AB est l'ensemble des points M du plan vérifiant $\vec{AM} \bullet \vec{BM} = 0$



2. Équation cartésienne d'un cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit (C) le cercle de centre Ω(a ; b), et de rayon r , et soit M(x ; y).

D'après la définition, M appartient à ce cercle si ΩM = r.

Or ΩM = r si et seulement si ΩM² = r², donc si et seulement si (x – a)² + (y -b)² = 0

En développant , on obtient : x² +y² -2ax -2by +a² +b²- r² = 0 : c'est l'équation du cercle.

Si on pose c = a² +b² – r², l'équation devient : x² +y² -2ax -2by +c = 0.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Si Ω (a ; b) et M(x ; y), l'équation cartésienne du cercle (C) de centre Ω et de rayon r a la forme x² +y² - 2ax - 2by + c = 0 , avec c = a² +b² – r².
- Réciproquement, l'ensemble des points M(x y) vérifiant x² +y² - 2ax - 2by + c = 0 est l'équation d'un cercle de centre Ω(a ; b) et de rayon r = $\sqrt{(a^2+b^2-c)}$ si $a^2+b^2-c \geqslant 0$

Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer l'équation du cercle (C) de centre Ω(-2 ; 3) et de rayon r = 4.

2) Préciser l'ensemble (F) = {M(x ; y) / x² + y² – 14x – 6y + 33 = 0}

3) Déterminer l'équation cartésienne du cercle (Γ) de diamètre AB si A(10 ; 7) et B(4 ; - 1)

Réponses

1) (C) = { M / ΩM = 4 }. ΩM = 4 si ΩM² = 16, alors (x + 2)² + (y -3)² = 16.

Après calcul, on trouve : (C) : x² + y² +4x – 6y – 3 = 0

2) Ici -2a = -14 et -2b = -6 et c = 33.

On trouve a = 7, b = 3 donc a² +b² - c = 7² +3² – 33 = 25.

Alors (F) est le cercle de centre Ω(7 ; 3) et de rayon r = 5 .

Remarque :

On peut aussi utiliser le début d'un carré pour transformer l'équation :

$(x + a)^2 – a^2 = x^2 + 2ax$ et $(x - a)^2 – a^2 = x^2 – 2ax$

$x^2 + y^2 – 14x – 6y + 33 = 0$,
Ce qui équivaut à $(x^2 – 14x) + (y^2 – 6y) +33 = 0$
$(x – 7)^2 – 49 + (y – 3)^2 – 9 + 33 = 0$.
On obtient $(x – 7)^2+ (y – 3)^2 = 25$, ou encore $\sqrt{(x-7)^2+(y-3)^2} = 5$
Si on pose $\Omega(7 ; 3)$, $r = 5$ et $M(x;y)$, on obtient la relation $\Omega M = 5$.

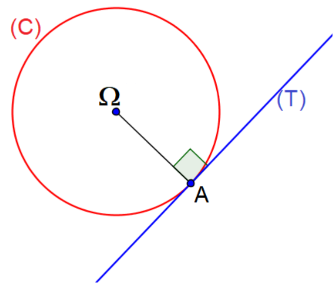
3) $M(x ; y) \in (\Gamma)$ si $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$, c'est-à-dire si $(x – 10)(x – 4) +(y – 7)(y + 1) = 0$.

Après calcul, on trouve $x^2 + y^2 – 14x – 6y + 33 = 0$

Ainsi l'équation du cercle (Γ) est : $x^2 + y^2 – 14x – 6y + 33 = 0$

3. Tangente à un cercle

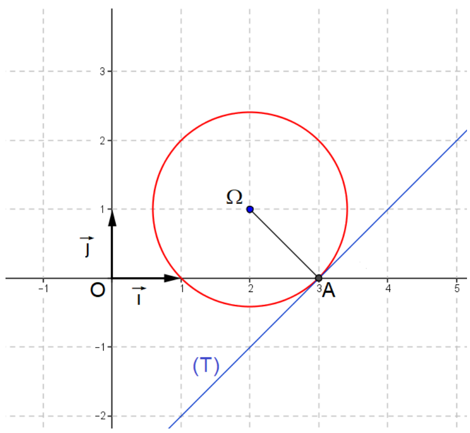
Le problème est de déterminer une équation cartésienne de la droite (T) tangente au cercle (C) au point A .
Cette droite est perpendiculaire à la droite $(A\Omega)$: $\vec{A\Omega}$ est donc un vecteur normal à cette droite.
$(T) = \{ M / \vec{M\Omega} \cdot \vec{A\Omega} = 0 \}$



Exemples

- Soit (C) le cercle de centre $\Omega(2;1)$ et de rayon $r=\sqrt{2}$.
  1. Montrer que le point A (3;0) appartient à ce cercle.
  2. Tracer ce cercle dans un repère orthonormé.
  3. Donner l'équation de la droite (T) tangente à ce cercle au point A.
  4. Tracer (T) dans le repère précédent.

Réponses
1) $\Omega A=\sqrt{(3-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}=r$. Donc A appartient à (C).
2)



3) Un point M(x;y) appartient à la tangente (T) si $\vec{\Omega A}.\vec{AM}=0$.

On a $\vec{\Omega A}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y\end{pmatrix}$.

$\vec{\Omega A}.\vec{AM}=0$ équivaut à 1.(x-3)+(-1)(y+1)=0

Ce qui donne x-y-4=0, ou y= x-4

. L'équation réduite de (T) est donc y = x-4

- Soit (C) le cercle d'équation $(x+1)^2+(y-2)^2=2$

1. Déterminer le centre et le rayon de ce cercle.
2. Déterminer les coordonnées des points A et B intersection de ce cercle avec l'axe des ordonnées. A est le point dont l'ordonnée est inférieure à celle de B.
3. Tracer ce cercle dans un repère orthonormé.
4. Donner l'équation de la droite (T) tangente à ce cercle au point A et tracer cette droite.

Réponses

1. Le centre de ce cercle est le point $\Omega(-1;2)$, et le rayon $r=\sqrt{2}$.
2. Les points d'intersection de ce cercle avec l'axe des ordonnées sont les points de (C) d'abscisses nulles : x= 0.

En remplaçant x par 0 dans l'équation, on a $(0+1)^2+(y-2)^2=2$ ou $(y-2)^2=1$.

Ce qui donne $(y-2)^2-1=0$, ou $(y-2-1)(y-2+1)=0$

Ce qui équivaut à y = 3 ou y =1.

Les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses sont dont A(0;1) et B(0;3).

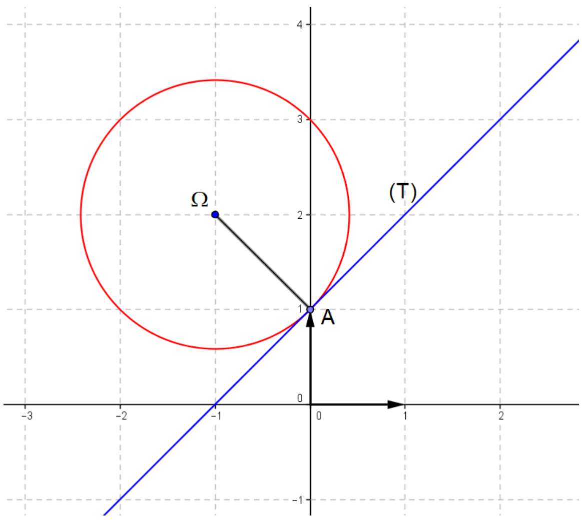
3. Un point M(x;y) appartient à la tangente (T) si $\vec{\Omega A}.\vec{AM}=0$.

On a $\vec{\Omega A}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{AM}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}$.

$\vec{\Omega A}.\vec{AM}=0$ équivaut à -1.x + 2 (y-1)=0

Ce qui donne -x + 2y-2=0, ou 2y= x+2

. L'équation réduite de (T) est donc $y=\frac{1}{2}x+1$

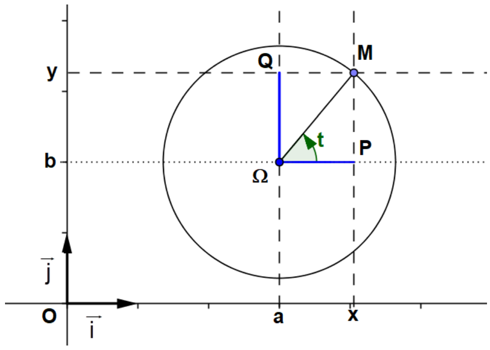


4. Équation paramétrique d'un cercle

- Soit M(x ; y) un point du cercle de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon R .

  On a $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$ et $\Omega P=R.\cos t$ et $\Omega Q=R.\sin t$

  D'où $\begin{cases}x=a+R\cos t\\ y=b+R\sin t\end{cases}$.



- Réciproquement, on considère l'ensemble de point M(x;y) vérifiant $\begin{cases}x=a+R\cos t\\ y=b+R\sin t\end{cases}$ où t est un paramètre réel.

  On a $\begin{cases}x-a=R\cos t\\ y-b=R\sin t\end{cases}$ et $\begin{cases}\dfrac{x-a}{R}=\cos t\\ \dfrac{y-b}{R}=\sin t\end{cases}$.

  Alors $\left(\dfrac{x-a}{R}\right)^2+\left(\dfrac{y-b}{R}\right)^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$.

  Ce qui donne $(x-a)^2+(y-b)^2=R$.

  Ainsi, l'ensemble des point M(x ; y) vérifiant $\begin{cases}x=a+R\cos t\\ y=b+R\sin t\end{cases}$ est le cercle de centre $\Omega(a\,;b)$.

  $\begin{cases}x=a+R\cos t\\ y=b+R\sin t\end{cases}$ est appelée équation paramétrique du cercle de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon R.

L'équation paramétrique du cercle de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon R est $\begin{cases}x=a+R\cos t\\ y=b+R\sin t\end{cases}$

Exemple

Donner l'équation paramétrique du cercle de centre I (3 ; 2) et passant par le point A(2 ; 1).

Réponse

Le rayon est $R=\sqrt{(3-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$.

Donc l'équation paramétrique du cercle centre I (3 ; 2) et passant par le point A(2 ; 1)

est $\begin{cases}x=3+\sqrt{2}.\cos t\\ y=2+\sqrt{2}.\sin t\end{cases}$ où t est un nombre réel