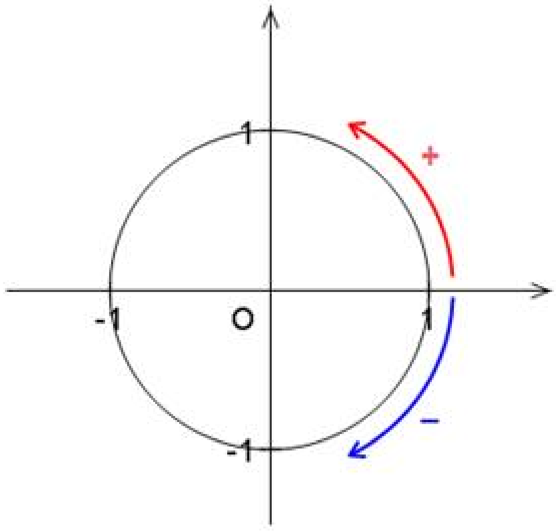
TRIGONOMÉTRIE : Cercle trigonométrique

1. Le cercle trigonométrique

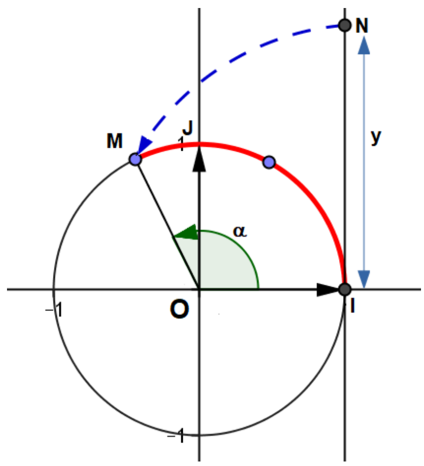
1.1 Définition

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , le cercle de centre O et de rayon 1, muni d'une origine I et d'un sens de parcours positif dans le sens contraire au sens des aiguilles d'une montre, est appelé le cercle trigonométrique.



Cercle trigonométrique

1.2 Enroulement



Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Soit T la tangente au cercle en I(1 ;0).

Soit N le point de T d'ordonnée y. Si on enroule T dans le sens positif autour du cercle trigonométrique, le point N va se positionner en un point M du cercle.

Le cercle trigonométrique a pour périmètre 2π . Soit N' le point de T d'ordonnée y - 2π . Si on enroule T dans le sens négatif sur le cercle, N' va se positionner aussi en M.

On obtient le même résultat avec les points de la droite T d'ordonnée y + 2π , y + 4π , y - 4π , y + $k2\pi$. Comme la longueur de l'arc IM est égale à la mesure en radian de l'angle $\alpha = \widehat{IOM}$, cet angle a une infinité de mesure.

1.3 Mesure principale

Dans le cercle trigonométrique, la mesure principale de l'angle $\alpha = \widehat{IOM}$ en radian c'est sa mesure dans l'intervalle $]-\pi \; ; \; \pi]$.

Exemple 1

Déterminons la mesure principale de $\frac{273\pi}{12}$. Soit α la mesure principale de cet angle.

Alors, il existe un entier relatif *k* tel que $\frac{273\pi}{12} = \alpha + k2\pi$ avec $-\pi<\alpha\leq\pi$

Effectuons la division euclidienne de 273 par 12. On obtient 273 = 12x22 + 9.

Par suite $\frac{273\pi}{12} = 22\pi + \frac{9\pi}{12}$

Donc $\frac{273\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$ + 11x 2π

En conclusion, la mesure principale de l'angle $\frac{273\pi}{12}$ est $\frac{3\pi}{4}$

Exemple 2

Déterminons la mesure principale de l'angle $\frac{64\pi}{3}$.

Soit α la mesure principale de cet angle. Alors, il existe un entier relatif *k* tel que $\frac{64\pi}{3}=\alpha+2.k.\pi$ avec $-\pi<\alpha\leq\pi$

Effectuons la division euclidienne de 64 par 3. On a 64 = 21x3 + 1.

Par suite , $\frac{64\pi}{3} = 21\pi + \frac{\pi}{3}$

On obtient, cette fois, un multiple impair de π . On pose alors : $21\pi = 22\pi - \pi$

Donc : $\frac{64\pi}{3} = 22\pi - \pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$ + 11 2π

La mesure principale de l'angle $\frac{64\pi}{3}$ est $\frac{-2\pi}{3}$

2. Lignes trigonométriques

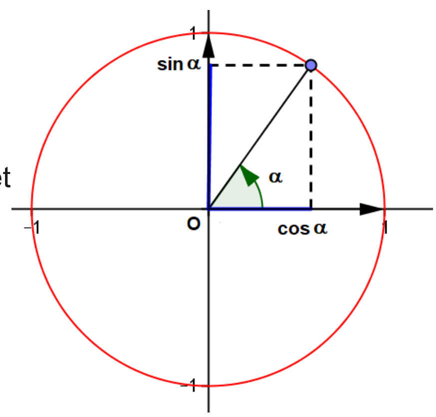
2.1 Définition

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit (C) le cercle trigonométrique, M un point de ce cercle, et α une mesure de l'angle $\widehat{IOM}$.

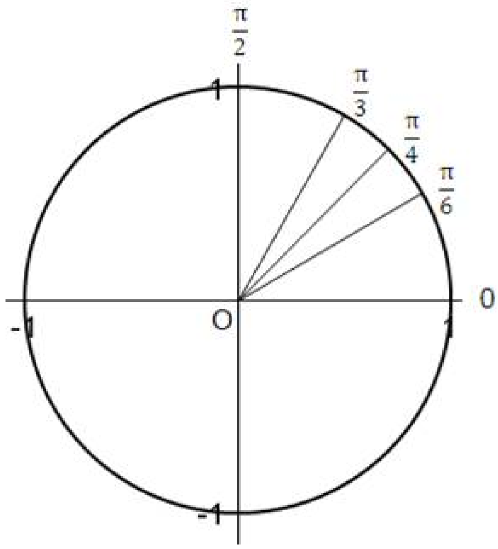
Le cosinus de l'angle α noté cos α est l'abscisse de M.

Le sinus de l'angle α noté sin α est l'ordonnée de M.

La tangente de l'angle α notée tan α est le rapport du sinus et du cosinus : $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.



2.2 Valeurs remarquables



x (en rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

2.3 Propriétés

Pour tout réel *x*, pour tout entier relatif k on a :

$-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\sin(x + k2\pi) = \sin x$ et $\cos(x + k2\pi) = \cos x$