SÉQUENCE 4 : CALCULS APPROCHÉS

1. Approximation d'ordre n :

1.1 Définition :

Soit x un réel. Les nombres décimaux consécutifs $\frac{p}{10^n}$ et $\frac{p+1}{10^n}$ sont appelés approximations décimales d'ordre n de x respectivement par *défaut* et par *excès*

si, et seulement si, $\frac{p}{10^n} \leq x \leq \frac{p+1}{10^n}$

1.2 Exemples :

3, 1 < π < 3, 2

3,1 est l'approximation décimale d'ordre 1 par défaut de π

3,2 est l'approximation décimale d'ordre 1 par excès de π .

3, 14 < π < 3, 15

3,14 est l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de π

3,15 est l'approximation décimale d'ordre 2 par excès de π '.

1, 414 < $\sqrt{2}$ < 1, 415

1,414 est l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de $\sqrt{2}$

1,415 est l'approximation décimale d'ordre 3 par excès de $\sqrt{2}$.

- 0, 334 < $\frac{-1}{3}$ < -0, 333

–0,334 $\frac{-1}{3}$ est l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de .

–0,333 est l'approximation décimale d'ordre 3 par excès de $\frac{-1}{3}$

2. Arrondis d'ordre n :

2.1 Définition

Soit x un réel. On appelle *arrondi d'ordre n* de x l'approximation décimale d'ordre *n* la plus proche de x c'est-à-dire qui est à la plus petite distance de x.

2.2 Troncature d'ordre *n* - Règles d'arrondi d'ordre *n.*

On obtient la *troncature d'ordre n* d'un nombre en supprimant tous les chiffres décimaux situés après le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal.

2.3 Exemples :

Soit le nombre : x = 2,526173084… .

2 est la troncature d'ordre 0 de x.

2,5 est la troncature d'ordre 1 de x.

2,52 est la troncature d'ordre 2 de x.

2,526 est la troncature d'ordre 3 de x.

2,5261 est la troncature d'ordre 4 de x.

Pour obtenir l'arrondi d'ordre *n* d'un nombre dont on connaît le début de l'écriture décimale, on procède comme suit :

- Si le $(n+1)^{\text{ième}}$ chiffre après la virgule est 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 alors l'arrondi d'ordre *n* est la troncature d'ordre *n* de ce nombre.
- Si le $(n+1)^{\text{ième}}$ chiffre après la virgule est 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; l'arrondi d'ordre *n* est obtenu en augmentant d'une unité le chiffre de droite de la troncature.

2.4 Exemples

E_1) Revenons à l'exemple précédent, soit x = 2,526173084… .

L'arrondi d'ordre 0 de x est 3.

L'arrondi d'ordre 1 de x est 2,5.

L'arrondi d'ordre 2 de x est 2,53.

L'arrondi d'ordre 3 de x est 2,526.

L'arrondi d'ordre 4 de x est 2,5262.

E_2) Soient les nombres : $\sqrt{5} = 2{,}236067977\ldots$; $-\dfrac{8}{7} = -1{,}142857143\ldots$.

- L'arrondi d'ordre 0 de $\sqrt{5}$ est 2.

L'arrondi d'ordre 1 de $\sqrt{5}$ est 2,2.

L'arrondi d'ordre 2 de $\sqrt{5}$ est 2,24.

L'arrondi d'ordre 3 de $\sqrt{5}$ est 2,236.

L'arrondi d'ordre 4 de $\sqrt{5}$ est 2,2361.

- L'arrondi d'ordre 0 de $-\dfrac{8}{7}$ est –1.

L'arrondi d'ordre 1 de $-\dfrac{8}{7}$ est –1,1.

L'arrondi d'ordre 2 de $-\dfrac{8}{7}$ est –1,14.

L'arrondi d'ordre 3 de $-\frac{8}{7}$ est –1,143.

L'arrondi d'ordre 4 de $-\frac{8}{7}$ est –1,1429.

3. Ordre de grandeur d'un nombre décimal :

3.1 Écriture normalisée d'un nombre décimal positif :

Soit x un nombre décimal positif. Alors on peut écrire x sous la forme x = $a \times 10^n$ où n est un entier relatif et a un nombre décimal vérifiant $1 \leq a < 10$.

L'écriture x = $a \times 10^n$ est appelée *écriture normalisée* de x.

3.2 Exemples :

$2{,}635 \times 10^{-2}$ est l'écriture normalisée de 263,5.

$1{,}27 \times 10^{-1}$ est l'écriture normalisée de 0,127.

3.3 Ordre de grandeur d'un nombre décimal positif :

Soit $a \times 10^n$ l'écriture normalisée d'un nombre décimal x et A l'arrondi d'ordre 0 de a .

Alors $A \times 10^n$ est appelé ordre de grandeur de x.

3.4 Exemples :

Nombre x	Écriture normalisée	Ordre de grandeur
193,5	$1{,}935 \times 10^{2}$	$2 \times 10^{2} = 200$
0,521	$0{,}5 \times 10^{-1}$	$1 \times 10^{-1} = 0{,}1$
1470	$1{,}47 \times 10^{3}$	$1 \times 10^{3} = 1000$
1500	$1{,}5 \times 10^{3}$	$2 \times 10^{3} = 2000$

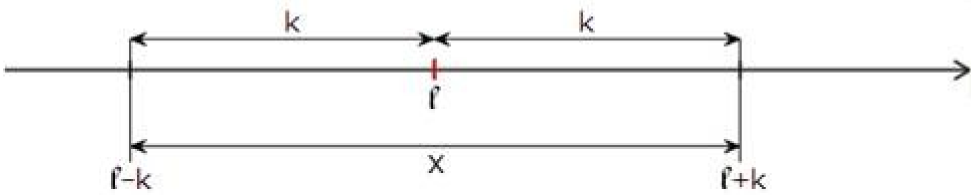
4. Valeurs approchées :

4.1 Définition :

Soit x un réel donné et k un réel strictement positif.

On dit que le réel **l** est une valeur approchée de x à k-près si, et seulement si,

$|x - l| < k$ ou $d(x, l) < k$ ou $x \in [l-k ; l+k]$



4.2 Exemple :

Sachant que π = 3,141592…, montrer que 3,12 est une valeur approchée de π à 3 x10^{-2}près.

Π – 3, 12 = 0,021592… 3 x10^{-2}.
On conclut que 3,12 est une valeur approchée de π à 3x10^{-2}. près

5. Encadrement d'un nombre réel :

5.1 Définition :

On appelle encadrement d'un nombre réel x tout intervalle borné contenant x.

L'amplitude de l'encadrement est la distance des extrémités de cet encadrement.

5.2 Exemple :

Une calculatrice affiche π = 3,141592….

[3,1; 3,2] est un encadrement de π d'amplitude 0,1.

En effet, 3,1 < π < 3,2 et 3,2 – 3,1 = 0,1.

Exemple : Sachant que 1,414 < $\sqrt{2}$ < 1,415, trouver un encadrement des nombres suivants:

a) 1+ $\sqrt{2}$; b) 3 $\sqrt{2}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Réponse :
a) Des inégalités 1,414 < $\sqrt{2}$ < 1,415, on déduit que 1+1,414 < 1 + $\sqrt{2}$ <1+1,415.

Soit 2,414 < 1+ $\sqrt{2}$ < 2,415.

b) De même, des inégalités 1,414 < $\sqrt{2}$ <1,415, on déduit que 3 x 1,414 < 3 $\sqrt{2}$ < 3 x 1,415,
Soit 4,242 < 3 $\sqrt{2}$ < 4,245.

c) De même, des inégalités 1,414 < $\sqrt{2}$ < 1,415, on déduit que

$\frac{1}{2}$ x 1,414 < $\frac{1}{2}$ x $\sqrt{2}$ < $\frac{1}{2}$ x 1,415, soit 0,7070 < $\frac{\sqrt{2}}{2}$ < 0,7075.

5.3 Encadrement d'une somme et d'un produit

Encadrement d'une somme

nous savons que l'inégalité est compatible avec l'addition, c'est-à-dire que si a ≤ x ≤ b et c ≤ y ≤ d , alors a +c ≤ x + y ≤ b + d

Encadrement d'un produit

Si a, b,c, d sont positifs et si a ≤ x ≤ b et c ≤ y ≤ d , alors a c ≤ x y ≤ b d

Exemple

- Sachant que 1,41 ≤ $\sqrt{2}$ ≤ 1,42, trouver un encadrement de 1 + $\sqrt{2}$

1,41 ≤ $\sqrt{2}$ ≤ 1,42, alors 1,41 + 1 ≤ $\sqrt{2}$ + 1 ≤ 1,42 + 1, c'est-à-dire 2,41 ≤ 1+ $\sqrt{2}$ ≤ 2,42

- Sachant que 1,41 ≤ $\sqrt{2}$ ≤ 1,42 et 1,73 ≤ $\sqrt{3}$ ≤ 1,74, encadrer $\sqrt{6}$

Comme les nombres sont positifs

1,41 ≤ $\sqrt{2}$ ≤ 1,42 et 1,73 ≤ $\sqrt{3}$ ≤ 1,74, alors 1,41x1,73 ≤ $\sqrt{3}$ $\sqrt{2}$ ≤ 1,42x1,74

donc : 2,44 ≤ $\sqrt{6}$ ≤ 2,47