Géométrie dans l'espace

Droites et plans dans l'espace

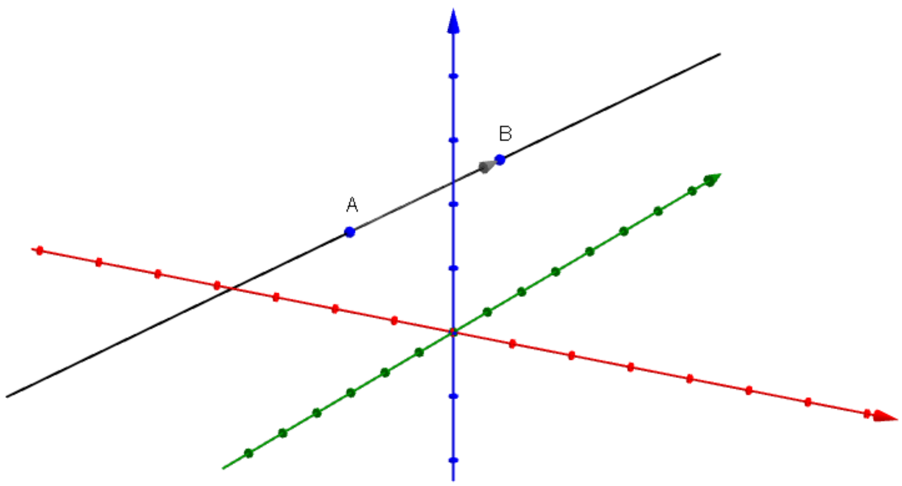
1. Équations paramétriques

1.1 Équation paramétrique d'une droite

1.1.1 Définition d'une droite

La droite (AB) est l'ensemble des points M tel que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

La droite (D) passant par le point A de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tel que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.



1.1.2 Équation paramétrique d'une droite

Soit (D) une droite passant par le point A(x_A ; y_A ; z_A) et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et soit M(x;y;z) un point de l'espace .

On a $M\in(D)$ si et seulement s'il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$ (signification de $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires).

Donc $\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka\\kb\\kc\end{pmatrix}$.

Ce qui est équivalent à : $\begin{cases}x=k.a+x_A\\y=k.B+y_A\\z=k.c+z_A\end{cases}$

C'est l'équation paramétrique de la droite (D).

Exemple

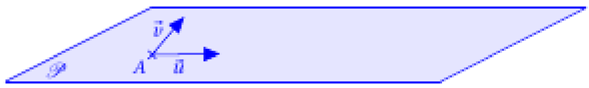
Soit A (1; −4; 3) et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}$. Alors la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases}x=5k+1\\y=k-4\\z=-2k+3\end{cases}$

1.2 Équation paramétrique d'un plan

1.2.1 Définition d'un plan

On considère trois points non alignés de l'espace A, B, C. L'ensemble des points M de l'espace défini par $\overrightarrow{AM}=s\,\overrightarrow{AB}+t\,\overrightarrow{AC}$ où k et t sont des réels est le plan (ABC).

Le plan passant par le point A dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires est l'ensemble des points M de l'espace défini par : $\overrightarrow{AM}=s\vec{u}+t\vec{v}$.



1.2.2 Équation paramétrique d'un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) .

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$. Le plan (P) passant par le point A(x_A ; y_A ; z_A) et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ a pour équation paramétrique de la forme : $\begin{cases}x=x_A+at+a's\\y=y_A+bt+b's\\z=z_A+ct+c's\end{cases}$

Exemple

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) .

On donne les points suivants A (2,-1,-3), B (0,1,4) et C (-3, 0, 0)

Donner la représentation paramétrique du plan (ABC).

Soit M(x, y,z)

$M\in(ABC)$ s'il existe s et t deux réels tels que : $\overrightarrow{AM}=s\,\overrightarrow{AB}+t\,\overrightarrow{AC}$.

On a donc : $M \in (ABC)$ si et seulement si $\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z+3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

.

Finalement, L'équation paramétrique de (ABC) est :

$$\begin{cases} x=2-2t-5\,s \\ y=-1+2\,t+s \\ z=3+7\,t+3\,s \end{cases}$$

2. Équation cartésienne d'un plan

2.1 Vecteur normal

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{n}$ trois vecteurs de l'espace . Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (P) dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

2.2 Équation cartésienne d'un plan

2.2.1 Forme générale

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

Tout plan admet une équation cartésienne de la forme : ax + by + cz + d = 0. Le vecteur normal à ce plan est : $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Réciproquement, soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et A(x_A, y_A, z_A). Le point M(x, y, z) appartient au plan (F) passant par A de vecteur normal $\vec{n}$ si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire que i $\overrightarrow{AM} \bullet \vec{n} = 0$

Après calcul, on arrive à la forme : ax + by + cz + d = 0

2.2.2 Détermination du vecteur normal

Pour un plan passant par trois points A,B,C ; un vecteur normal est $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

Exemple

Déterminer une équation cartésienne du plan (F) passant par A (3; -1 ; 2) de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Réponse

M(x;y;z) appartient à (F) si si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire que i $\overrightarrow{AM} \bullet \vec{n} = 0$

c'est-à-dire , (x-3)•1 + (y+1)(-3) +(z-2)(-5) = 0 . On a alors x -3y -5z +4 = 0.