Primitives et intégrales

1. Primitives

1.1 Définition et exemples

f et F sont deux fonctions définies sur un intervalle I. Dire que F est une **primitive** de f sur I signifie que F est dérivable sur I et que pour tout x de I, F'(x) = f(x).

Exemples :

- la fonction F définie par F(x) = 2x +1 est une primitive sur IR de f (x) = 2
- la fonction F définie par F(x) = x^3 est une primitive sur IR de f (x) = 3 x^2

1.2 Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle I

Soit F une primitive sur I d'une fonction f

Pour tout réel k, la fonction G définie sur I par G(x) = F(x) + k, est dérivable sur I, et G'(x) = F'(x) ; or F'(x) = f(x). Donc G est une primitive de f.

Réciproquement, si F et G sont deux primitives de f sur I, alors F et G sont dérivables sur I et F' =G'= f, d'où F'-G' = 0.

La dérivée de la fonction F - G est la fonction nulle. En conséquent, F - G est une fonction constante sur I et il existe un réel k tel que G(x) = F(x) + k.

f est une fonction définie sur un intervalle I.

S'il existe une primitive F de f sur I, alors,pour toute autre primitive G de f, il existe un réel k tel que

G(x) = F(x) + k, pour tout x de I.

Exemple

L'ensemble des primitives sur IR de f(x) = 2x-3 est prim f(x) = x² - 3x + k

Si f admet une primitive sur I, alors elle en admet une infinité.

1.3 Primitive vérifiant une condition

Soient $x_0 \in$ I et y_0 un réel donné. Si F est une primitive de f sur I, alors il existe une unique primitive G de f sur I telle que G(x_0) = y_0.

C'est la fonction G telle que G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0.

Exemple

Soit f(x) = 4x^3 – 2 . Déterminer la primitive F de f sur IR vérifiant F(0) = 3.

l'ensemble des primitives de f est prim f(x) = x^4 – 2x +k. F vérifie F(0) = 3, alors k = 3 et F(x) = x^4 – 2x + 3.

Toute fonction f définie et continue sur un intervalle I y admet une primitive.

1.4 Détermination des primitives

1.4.1 Primitives des fonctions usuelles

La lecture "inverse" du tableau des dérivées donne :

Fonction f(x)	Fonction F(x)	Intervalle I
$a,\ a\in\mathbb{R}$	$ax+k$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2}+k$	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+k$	$\mathbb{R}$
$x^r,\ r\in\mathbb{Q}-\{-1\}$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}+k$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+k$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	ln x + k	$]0;+\infty[$
e^x	$e^x + k$	$\mathbb{R}$

1.4.2 Recherche de primitives : exemples

Pour la recherche des primitives nous utiliserons les propriétés suivantes :

- F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur I. Alors F+G est une primitive de f+g sur I.
- F est une primitive de f sur I et λ est un réel. Alors λF est une primitive de λf sur I.

Soit f une fonction polynôme. Pour trouver une primitive de f, il suffit de trouver une primitive de chacun de ses monômes et de faire la somme de ces primitives.

Exemple

Soit $f(x) = 3x^2 + 7x - 4$.

Une primitive de $3x^2$ est x^3, une primitive de 7x est $7\frac{x^2}{2}$ et enfin, une primitive de 4 est 4x.

Donc, une primitive de f est la fonction $F(x) = 3x^3+7\frac{x^2}{2}+4x$

u est une fonction dérivable sur un intervalle I et u' est sa fonction dérivée.

Alors $\frac{1}{2}u^2$ est une primitive de u'.u sur I.

De même, $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$ est une primitive de $u'.u^n$ sur I ($n\in\mathbb{N}^*$).

2. Intégrales

2.1 Définition et exemple

2.1.1 Définition

Soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F une de ces primitives, soient a et b deux points de I. La quantité F(b) − F(a) (encore notée $[F(x)]_a^b$) est appelée intégrale de f entre a et b et est notée $\int_a^b f(x)dx$.

On lit « somme de a à b de f(x) dx ».

a et b sont les bornes de l'intégration

la variable x est appelée variable de l'intégration. On peut la remplacer par n'importe quelle lettre car elle n'intervient pas dans le résultat.

2.1.2 Exemple

Soit f(x) = 2x, une primitive de F(x) = x^2, donc $\int_1^2 f(x)dx$ = F(2) – F(1) = $2^2 - 1^2 = 3$.

alors $\int_1^2 f(x)dx$ = 3

2.2 Propriétés

Pour tout nombre a et b et pour toute fonction f et g continue sur un intervalle I contenant a et b.

$\int_a^a f(x)dx = 0$

$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

$\int_a^b (f+g)(x) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b (k.f)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

Si $f(x) \geq 0$ pour tout x de [a;b], alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout x de [a;b], alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

3. Relation entre primitive et intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I.

L’unique primitive de f sur I qui prend la valeur 0 en a est la fonction f définie par :

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

De cette relation , ln x = $lnx=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$