Logarithme népérien et Exponentielle népérienne

1. Logarithme népérien

1.1 Définition

La fonction **logarithme népérien**, notée ln est la fonction qui admet comme dérivée la fonction $x \to \frac{1}{x}$.
Elle est définie sur $]0;+\infty[$ et elle s'annule pour x = 1.

1.2 Conséquences immédiates

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0;+\infty[$;
- La fonction est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\ln'(x)=\frac{1}{x}$;
- ln(1)= 0
- Si f(x) = ln u(x), D_f = { $x \subset IR / u(x) > 0$ }

1.3 Propriétés algébriques

- Pour tous réels a > 0 et b > 0 ; ln(a.b) = ln(a) + ln(b)
- Pour tous réels a > 0 et b > 0, $\ln(\frac{a}{b})=\ln(a)-\ln(b)$
- En particulier : $\ln(\frac{1}{b})=-\ln(b)$
- Pour tout réel a et pour tout entier n, ln (a^n) = n ln(a)
- En particulier ln(a²) = 2lna
- Pour tout réel a >0, $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln(a)$

1.4 Équations et Inéquations

Pour tous réels a > 0 et b > 0 :

- ln(a) = ln(b) si et seulement si a = b
- ln(a) = b si et seulement si a = e^b
- ln(a) > ln(b) si et seulement si a > b
- ln(a) > b si et seulement si a > e^b
- ln(a) > 0 si et seulement si a > 1
- ln(a) < 0 si et seulement si 0 < a < 1

1.5 Valeurs particulières

- ln 1 = 0
- ln e = 1
- Pour tout entier naturel n, ln e^n = n et ln $\ln\frac{1}{n}=-n$

1.6 Applications

Exemple 1

Écrire en fonction de ln2 et ln3 a = ln 6 , b = ln 8 .

On a 6 =2x3 donc ln 6 = ln 2 + ln 3

Comme 8 = 2^3, ln 8 = $\ln 2^3$ = 3 ln 2

Exemple 2

Résoudre dans IR les équations suivantes :

(1) ln (3x-2) = ln x

(2) ln(1+ x) = 2

Réponse

(1) ln(3x - 2) = ln x équivalent à 3x - 2 = x alors , 2x - 2 = 0 , enfin x = 1.

On va vérifier, ln(3•1-2) = ln 1. L'égalité est vérifié.

(2) ln(1 + x) = 2 équivalent à 1 + x = e² et x = e² – 1

2. Fonction exponentielle népérienne

2.1 Théorème et définition

- Toute fonction f monotone sur un intervalle I sur l'intervalle J admet une fonction réciproque, notée f^{-1}, de J sur I. À tout réel y de J, elle associe l'unique x de I solution de l'équation f(x) = y.
- f et f^{-1} ont le même sens de variation.

La fonction ln est strictement croissante de $]0;+\infty[$ sur IR. Elle admet une réciproque définie sur IR , appelée fonction exponentielle et notée exp :

$y=\exp(x) \Leftrightarrow x=\ln(y)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0;+\infty[$

Notation : Pour des raisons qui seront données ultérieurement, on note exp(x) = e^x.

2.2 Propriétés

- $\begin{cases} y=e^x \\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} x=\ln(y) \\ y\in]0;+\infty[\end{cases}$
- ln(e^x) = x , pour tout réel x
- $e^{\ln(x)}$ = x , pour tout réel x > 0

- $e^0=1$
- Pour tous réels a et b, $e^{a+b} = e^a.e^b$
- $e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$ en particulier $e^{-a}=\frac{1}{e^a}$

Remarque : ces propriétés sont analogues à celles des puissances, ce qui justifie la notation e^x.

Exemple: $e^{3 + \ln(2)} = e^3.e^{\ln(2)} = 2e^3$

2.3 Résolution d'équations et d'inéquations

- $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$
- $e^a = b$ si et seulement si $a = \ln b$
- $e^a < e^b$ si et seulement si $a < b$
- $e^a > 1$ si et seulement si $a > 0$
- $0 < e^a < 1$ si et seulement si $a < 0$

Exemples

Résoudre dans IR l'équation $e^x = 5$.

$x = \ln 5$

Résoudre dans IR,l'inéquation $e^x > e^{2.}$

$x > 2$