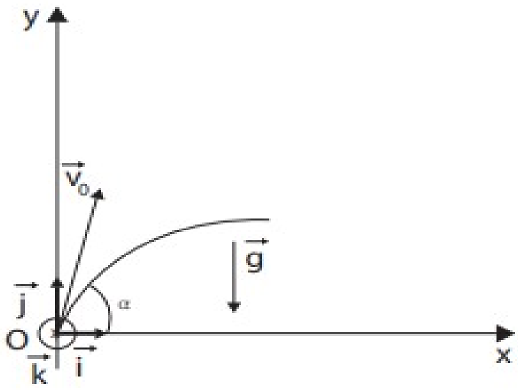
Mouvement dans un champ uniforme

Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur uniforme

1. Lancer d'un projectile



Un projectile est lancé à l'instant t = 0 avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α par rapport à l'horizontale.
On assimile le projectile à un point matériel ce qui nous permet de le réduire au mouvement de son centre d'inertie M.
L'étude est réalisée avec les approximations suivantes :

- On considère que le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme,
- On néglige la poussée d'Archimède et les frottements par rapport au poids du système.

On étudie le mouvement du projectile dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen avec une bonne approximation, muni d'un repère cartésien (Oxyz).
Le mouvement a lieu dans le plan (Oxy) qui contient les vecteurs $\vec{v}_0$ et $\vec{g}$. O est la position initiale du projectile M.
Dans ce système d'axes, les coordonnées du vecteur vitesse initiale sont :

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \\ v_{0z} = 0 \end{cases}$$

Le référentiel, le repère et le système étant déjà définis, on va faire le bilan des forces qui s'exercent sur le système et on va énoncer la loi que l'on va appliquer.

2. Bilan des forces et application de la deuxième loi de Newton

Le projectile est soumis à une force, son poids. On dit dans ce cas que le projectile est en chute libre.

Les caractéristiques du poids sont:

$\vec{P}=m\vec{g}$, force verticale et dirigée vers le bas, de valeur constante puisque la masse m du solide est constante et le vecteur $\vec{g}$ est constant car on a supposé le champ de pesanteur uniforme.

La deuxième loi de Newton (relation fondamentale de la dynamique) s'écrit $\sum \vec{F}=\vec{P}$ et $\vec{P}=m\vec{g}$ ce qui donne m $\vec{a}=m\vec{g}$ $soit$ $\vec{a}=\vec{g}$

L'accélération, et donc le mouvement du projectile, ne dépendent pas de sa masse: deux projectiles de masses différentes en chute libre ont le même mouvement.

3. Vecteur vitesse instantanée

Sachant que $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ et que $\vec{g} = -g\vec{j}$, car le vecteur $\vec{g}$ et le vecteur $\vec{j}$ sont opposés,

la deuxième loi de Newton conduit, par projection sur les axes Ox et Oy, au système suivant :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}(t) = 0 \\ a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}(t) = -g \\ a_z(t) = \frac{dv_z}{dt}(t) = 0 \end{cases}$$

Pour obtenir les trois coordonnées du vecteur vitesse, il suffit de trouver la primitive de ces trois coordonnées par rapport au temps. Il vient

$$\vec{v}\begin{cases} v_y(t) = \quad C_1 \\ v_y(t) = -gt + C_2 \\ v_0 = \quad C_3 \end{cases}$$ où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes d'intégration.

Pour déterminer les constantes, on se place dans les conditions initiales.
À l'instant initial, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ de coordonnées

$$\vec{v}_0\begin{cases} v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_{0y} = v_0\sin\alpha \\ v_{0z} = 0 \end{cases}$$, ce qui conduit au système

$$\begin{cases} v_x(0) = \quad v_0\cos\alpha = C_1 \\ v_y(0) = v_0\sin\alpha = -g\times 0 + C_2 \\ v_z(0) = \quad 0 = C_3 \end{cases}$$ ou encore

$$\begin{cases} C_1 = v_0\cos\alpha \\ C_2 = v_0\sin\alpha \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

De ce fait, le vecteur vitesse d'un tel projectile est donné par :

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = \quad v_0\cos\alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0\sin\alpha \\ v_z(t) = \quad 0 \end{cases}$$

La vitesse horizontale est constante, donc le mouvement horizontal est uniforme. Le mouvement vertical, lui, est uniformément accéléré car l'accélération verticale est constante.

4. Vecteur position

Sachant que $\vec{v}=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, où le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

le système d'équations donnant les coordonnées du vecteur vitesse s'écrit également:

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t)=\dfrac{dx}{dt}(t)=v_0\cos\alpha \\ v_y(t)=\dfrac{dy}{dt}(t)=-gt+v_0\sin\alpha \\ v_z(t)=\dfrac{dz}{dt}(t)=0 \end{cases}$$

Les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sont les primitives des coordonnées du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{cases} x(t)=(v_0\cos\alpha)t+C_4 \\ y(t)=-\dfrac{1}{2}gt^2+(v_0\sin\alpha)t+C_5 \\ z(t)=C_6 \end{cases}$$

où C_4, C_5 et C_6 sont des constantes d'intégration déterminées grâce aux conditions initiales sur la position.

À l'instant initial, M est au point 0, donc ses coordonnées sont nulles :

$$\begin{cases} x(0)=0=(v_0\cos\alpha)\times 0+C_4 \\ y(0)=0=-\dfrac{1}{2}g\times 0^2+(v_0\sin\alpha)\times 0+C_5 \\ z(t)=0=C_6 \end{cases}$$

Ceci donne les constantes d'intégration $C_4 = C_5 = C_6 = 0$.

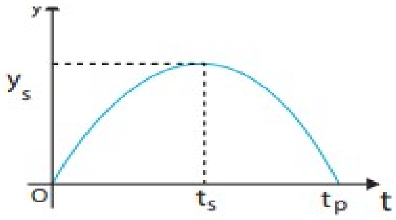
Les coordonnées du vecteur position s'écrivent finalement :

$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{cases} x(t)=(v_0\cos\alpha)t \\ y(t)=-\dfrac{1}{2}gt^2+(v_0\sin\alpha)t \\ z(t)=0 \end{cases}$$

x(t), y(t) et z(t) sont les équations horaires du mouvement du projectile.

L'ordonnée y(t) du projectile est une parabole.

Puisque z = 0, le mouvement se déroule dans le plan de tir (Oxy).



5. Équation cartésienne de la trajectoire

Il s'agit d'exprimer y en fonction de x en éliminant le paramètre temps entre les deux équations horaires x(t) et y(t).

L'équation horaire x= ($v_0$cosa)t conduit à écrire $t=\dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$

En remplaçant t par cette expression dans l'équation horaire de y, il vient:

$$y=-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2+v_0\sin\alpha\frac{x}{v_0\cos\alpha}$$

L'équation cartésienne de la trajectoire est donc :

$$y=\frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+(\tan\alpha)x$$

Il s'agit d'une parabole, dans le plan de tir, incurvée vers le bas.

6. Caractéristique de la trajectoire

La flèche

C'est la distance entre le sommet de la trajectoire et l'axe des abscisses.

Le sommet est atteint lorsque $v_y(t) = 0$ et ceci est vrai à la date $t_s = \dfrac{v_0\sin\alpha}{g}$.

En introduisant cette expression de t_s dans y(t), il vient:

$$y_s=-\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2+v_0\sin\alpha\frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

La flèche de la trajectoire, hauteur maximale atteinte, s'écrit :

$$y_s=\frac{1}{2}\times\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g}$$

La portée

La portée est l'abscisse x_p du point P, dont l'ordonnée y_p est nulle. C'est le point du sol sur lequel arrive le projectile après sa chute.

Ceci conduit à résoudre l'équation y = 0, soit $-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+(\tan\alpha)x=0$

En factorisant par x on montre qu'il existe deux solutions :

- la solution x = 0 qui correspond au point de lancer O,
- l'autre solution qui est donc x_p et qui vérifie

$$-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_p+\tan\alpha=0$$

Elle s'écrit ainsi : $x_p=\frac{2v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g}$ ou encore $x_p=\frac{2v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}$

La portée de la trajectoire s'exprime sous la forme :

$$x_p=\frac{2v_0^2\sin(2\alpha)}{g}$$

Elle croit avec v_0^2 et avec sin(2α). Pour une valeur donnée de v_0, elle est maximale pour sin(2α) = 1 c'est-à-dire pour a= 45°.

Pour une certaine valeur de v0, deux angles de tir complémentaires peuvent correspondre à une même portée: α_1 et α_2 =90° - α_1

7. Cas particulier: chute libre verticale sans vitesse initiale

Lorsque la vitesse initiale est nulle (v_0=0), le projectile est en chute libre verticale: seul l'axe (Oy) est utile vu que l'accélération est verticale.

Cela nous donne:

$v_y(t)$ = -gt et $y(t)=\frac{-1}{2}gt^2$

Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.