# Mouvement de projectiles dans un champ de pesanteur uniforme

*Connaissances et savoir-faire exigibles:*

- ✗ Appliquer la deuxième loi de Newton à un projectile dans un champ de pesanteur uniforme.
- ✗ Montrer que le mouvement est plan.
- ✗ Établir l'équation de la trajectoire à partir des équations horaires paramétriques.
- ✗ Savoir exploiter un document expérimental reproduisant la trajectoire d'un projectile :

-tracer des vecteurs vitesse et accélération, déterminer les caractéristiques du vecteur accélération,

- trouver les conditions initiales.

- Savoir-faire expérimentaux

- ✗ Savoir enregistrer expérimentalement la trajectoire d'un projectile et exploiter le document obtenu

***Introduction:***

Dans le chapitre précédent, nous avons appris à utiliser la deuxième loi de newton pour décrire le mouvement à une dimension d'un solide. Ici nous allons étudier, toujours avec cette même loi, le mouvement à deux dimensions d'un solide qui se meut dans le champ de pesanteur uniforme.

***Problème:***

Un joueur de pétanque veut pointer sa boule pour l'amener près du cochonnet. Il veut l'envoyer à une distance de 6m, mais il ne doit pas dépasser une hauteur de 3m du sol, car un arbre peut gêner sa progression. La main du joueur lâche la boule à une hauteur de 1.2m du sol avec un angle de 40°.

Est-ce possible?

***Résolution:***

*1)Schéma de la situation:*

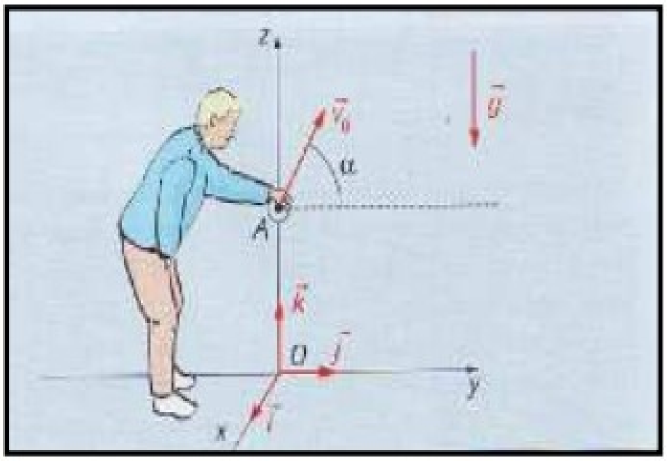
- On cherche donc à connaître v0 afin de réaliser les conditions:

$$z_{max} < 3m \text{ et } y_{max} = 5m.$$

- On sait que OA = z(t=0) = $z_0$=1,2m

x(t=0) = 0

y(t=0) = 0




### *2) Les bases à définir avant tout problème de mécanique:*

On travaille dans le référentiel du joueur, fixe, dont les pieds sont liés au sol. C'est un référentiel terrestre supposé galiléen le temps du lancer de la boule.

Le système étudié est la boule de pétanque.

Le bilan des forces, si on néglige les forces exercées par l'air sur le système, ne fait apparaître que le poids de la boule.

Un solide en mouvement dans le champ de pesanteur uniforme, qui n'est soumis qu'à son poids, est appelé un ***projectile.***

### *3) Application de la deuxième loi de Newton :*

On a donc, vu la seule force appliquée : P = m× a ⇔ m× g = m× a ⇔ a = g

### *4) Équations horaires paramétriques :*

a. Obtention de l'accélération sur les trois axes :

On projette sur les différents axes du repère :

Sur Ox : $a_x = 0$ / Sur Oy : $a_y = 0$ / Sur Oz : $a_z = -g$

b. Obtention de la vitesse en fonction du temps sur les trois axes :

On a, a = dv/dt. Donc pour avoir v = f(t), nous devons intégrer l'expression de l'accélération :

Sur Ox : $v_x(t) = 0 + cte1$ / Sur Oy : $v_y(t) = 0 + cte2$ / Sur Oz : $v_z(t) = -gt + cte3$

Pour avoir la valeur de ces constantes, on regarde la valeur de v (t = 0) :

$v_x(t = 0) = 0$ ; $v_y(t = 0) = v_0\cos\alpha$ ; $v_z(t = 0) = v_0\sin\alpha$

D'où :

Sur Ox : $v_x(t) = 0$ / Sur Oy : $v_y(t) = v_0\cos\alpha$ / Sur Oz : $v_z(t) = -gt + v_0\sin\alpha$

c. Obtention de la position en fonction du temps sur les trois axes :

On a, v = dpos/dt. Donc pour avoir p = f(t), nous devons intégrer l'expression de la vitesse :

Sur Ox : $x(t) = 0 + cte'1$ / Sur Oy : $y(t) = v_0\cos\alpha \times t + cte'3$ / Sur Oz : $z(t) = -1/2gt^2 + v_0\sin\alpha \times t + cte'3$

Pour avoir la valeur de ces constantes, on regarde la valeur de p (t = 0) :

$x(t = 0) = 0$ ; $y(t = 0) = 0$ ; $z(t = 0) = z_0$

D'où :

Sur Ox : $x(t)= 0$ / Sur Oy : $y(t) = v_0\cos \alpha \times t$ / Sur Oz : $z(t) = -1/2gt^2 + v_0\sin \alpha \times t + z0$

*5) Conséquences : mouvement plan et équation de la trajectoire (2) et (3) :*

a. Mouvement plan :

Puisque x = 0, le mouvement de la boule de pétanque ne s'effectue que dans le plan (yOz).

Ainsi, en exprimant z = f(y) ou y = g(z) on obtient l'équation de la trajectoire :

b) Équation de la trajectoire:

- D'après l'équation paramétrique sur Oy, on peut écrire: $t=\dfrac{y}{v_0 \cos \alpha}$
- On reporte alors cette expression dans l'équation paramétrique selon Oz:

$$z(t) = -\frac{1}{2}\frac{g \times y^2}{v_0{}^2\cos^2\alpha} + \frac{v_0 \sin\alpha \times y}{v_0 \cos\alpha} + z_0$$

$$\boxed{z(t) = \frac{-g}{2v_0{}^2\cos^2\alpha} \times y^2 + \tan\alpha \times y + z_0}$$

***Réponse au problème :***

La seule condition initiale qui nous manque est la vitesse initiale $v_0$, on comprend donc que nous allons travailler sur cette vitesse pour savoir si la situation est possible.

- La boule ne doit pas monter plus haut que 3m : $z(t) < 3$m. Lorsqu'elle est au plus haut, on a $v_z(t) = 0$. $v_z(t) = 0 \Leftrightarrow$ $t=\dfrac{v_0 \sin \alpha}{g}$ on remplace dans l'équation suivante:

  $z(t)<3 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} xgx \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} + v_0 \sin\alpha \, x \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} + z_0 < 3 \ldots$

  $$\Leftrightarrow v_0 < \sqrt{\frac{2g(3-z_0)}{\sin^2\alpha}} = 9{,}2\, m/s$$

- La boule doit atteindre une portée de 6m: $y(t)= 6$m

  Quand elle tombe au sol: $z(t) =0$.

  $y(t) =6 \Leftrightarrow t = \dfrac{6}{v_0 \cos\alpha}$ on remplace dans l'équation suivante:

z(t)=0 ⇔ $-\frac{1}{2}xgx\frac{6^2}{v_0^2\cos^2\alpha}+v_0\sin\alpha\, x\frac{6}{v_0\cos\alpha}+z_0=0$ ….

⇔ $$\boxed{\Leftrightarrow v_0=\sqrt{\frac{0.5g\left(6^2/\cos^2\alpha\right)}{6\tan\alpha+z_0}}=6.9m/s}$$

***Les deux conditions peuvent être respectées, le joueur pourra réaliser son tir.***

***Remarque :***

On parle généralement de portée pour la **distance horizontale maximale** que peut atteindre un tir. On parle de flèche pour la hauteur maximale que peut atteindre un tir.