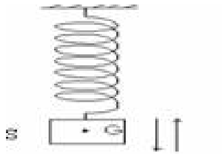
Exercices sur pendule élastique

1er Exercice : Pendule élastique vertical:

On considère un pendule élastique vertical constitué d'un ressort de constante de raideur k=20N/m et d'un corps solide de masse m=200g .

On écarte le corps S verticalement vers le bas à partir de sa position d'équilibre d'une distance égale à 3cm et on le lâche sans vitesse initiale.



A l'instant t=0 le corps passe de la position d'équilibre stable G_o dans le sens positif.

1) Déterminer l'allongement du ressort à l'équilibre Δl_o

2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

3) Donner l'équation horaire du mouvement.

4) Déterminer la période propre du mouvement. On donne g=10N/kg.

Correction

1) <u>Le système étudié</u> :{le corps S à l'équilibre}

<u>Bilan des forces</u>: à l'équilibre le corps S est soumis à l'action des forces suivantes :

$\vec{P}$: son poids.

$\vec{T_0}$: la tension du ressort à l'équilibre.

D'après la condition d'équilibre du corps S on a donc: $T_o = P = m.g \rightarrow K\Delta l_o = m.g$

$$\Delta l_0 = \frac{mg}{K} = \frac{0{,}2\,x\,10}{20} = 0{,}1\,m = 10\,cm$$

2) <u>-Le système étudié</u> :{le corps S } lorsqu'il effectue des oscillations.

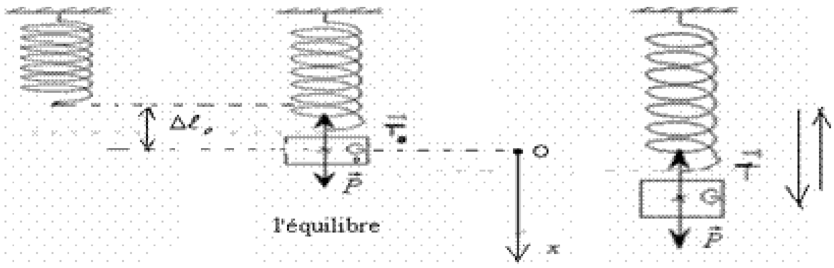
\- <u>Bilan des forces</u>: pendant son mouvement le corps S est soumis à l'action des forces suivantes :

$\vec{P}$: son poids.

$\vec{T}$: la tension du ressort .

On considère un repère $(O, \vec{i})$, son origine O est confondu avec le centre d'inertie G_0

du corps S à l'équilibre



-**Application de la deuxième loi de Newton**: $\Sigma\vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G \quad \Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{T} = m.\vec{a}_G$

Par projection sur l'axe ox on a: $m.g - K.\Delta l_o - K.x = m.a_G$ donc :

$m.g - K.(\Delta l_o + x) = m.a_G \rightarrow P - T = m.a_G$

Or d'après la condition d'équilibre : $m.g = K.\Delta l_o \rightarrow m.g - K.\Delta l_o = 0$

donc: $- K.x = m.a_G$

d'où: $\mathbf{m\ \ddot{x} + K\,x = 0} \rightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$

C'est l'équation différentielle du mouvement.

3) La solution de l'équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$ est: $x = x_m.\cos(\omega_0 t + \varphi)$

D'après les données on a :

$\omega_o = \sqrt{\frac{m}{K}} = \sqrt{\frac{0,2}{20}} = 10\text{rad/s}$ et $x_m = 3\text{cm}$

Et d'après les conditions initiales : à t=0 , x=0 donc :

à t=0; $\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\varphi = 0 \rightarrow 0 = x_m.\cos\varphi$

le corps passe de la position d'équilibre stable G_o dans le sens positif v>0 à t=0.

Et on a: $\boldsymbol{x = x_m.\cos(\omega_o.t + \varphi) \rightarrow v = \dot{x} = -x_m\,\omega_o.\sin(\omega_o.t+\varphi)}$

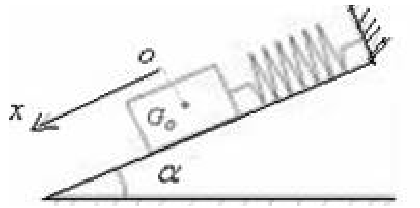
donc à t=0 : $v = -x_m.\omega_o.\sin\varphi > 0 \rightarrow \sin\varphi < 0$ donc $\varphi < 0$ d'où: $\boldsymbol{\varphi = -\frac{\pi}{2}}$

L'équation horaire du mouvement est : $x = 3.10^{-2}.\cos(10.t - \frac{\pi}{2})$

4) La période propre du mouvement. : $T_o = 2\pi.\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi.\sqrt{\frac{0,2}{20}} \approx 0,628\ s$

2ème Exercice : Pendule élastique incliné:-

Un pendule élastique est placé sur un plan incliné d'un angle a = 30^o par rapport au plan horizontal .Le pendule élastique est constitué d'un ressort maintenue par un support fixe à l'une de ses extrémités alors que l'autre extrémité est liée à un corps solide de masse de masse m=200g . (voir schéma).



Sachant que l'allongement du ressort à l'équilibre est : Dl_o = 8cm

1)Déterminer l'allongement de ressort à l'équilibre .

2) On écarte le corps de sa position d'équilibre de 2cm selon la ligne de la grande pente vers le bas et on le lâche sans vitesse initiale.

a- Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

b-Sachant que le corps passe à t=0 du point d'abscisse x=+1cm dans le sens positif.

Déterminer l'équation horaire du mouvement. On donne : g=10N/kg

Réponse :

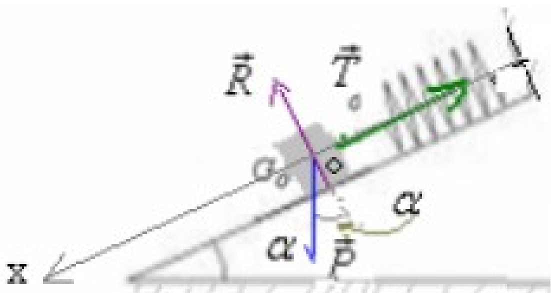
1) Système étudié {le corps solide à l'équilibre}

Bilan des forces:

$\vec{P}$: poids du cavalier.

$\vec{R}$: réaction du plan de contact elle est perpendiculaire au plan de contact car les frottements sont négligeables..

$\vec{T}_0$: Tension du ressort à l'équilibre



Condition d'équilibre: $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_0 = \vec{0}$

Par projection sur l'axe ox: $P.\sin a - T_o + 0 = 0 \rightarrow m.g.\sin a - k.\Delta l_o = 0$

donc : $\Delta l_o = \dfrac{m.g.\sin\alpha}{k}$

AN: $\Delta l_o = \dfrac{0{,}2.\sin 30 x 10}{20} = 0{,}05\, m = 5\, cm$

2) Système étudié {le corps solide}

Bilan des forces:

$\vec{P}$: poids du cavalier.

$\vec{R}$: réaction du plan de contact elle est perpendiculaire au plan de contact car les frottements sont négligeables..

$\vec{T}$: Tension du ressort lors du mouvement

En appliquant la deuxième loi de Newton: $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m.\vec{a_G}$

Par projection sur l'axe ox: $P - T + 0 = m . a_x \rightarrow m.g - k(\Delta l_0 + x) = m.a_x \rightarrow m.g - k\Delta l_0 - kx = m.\ddot{x}$

et d'après la condition d'équilibre, on a: $m.g.\sin\alpha - k\Delta l_0 = 0$ donc: $- k.x = m.\ddot{x}$

d'où $m.\ddot{x} + \dfrac{k}{m}.x = 0$

1) la solution de cette équation différentielle est de la forme suivante: $x = x_m .\cos(\omega_o .t + \varphi)$

avec : $\omega_o = \sqrt{\dfrac{m}{K}} = \sqrt{\dfrac{0{,}2}{20}} = 10 rad / s$ et $x_m = 2cm$

Pour déterminer la valeur de j ,<u>on utilise les conditions initiales</u> : à t=0, on a: x=1cm

En remplaçant dans (1) on a: $1 = 2.\cos\varphi \rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{2}$

d'où: $\varphi = \cos^{-1}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pm\pi}{3}$

Or le corps passe à t=0 du point d'abscisse x=+1cm dans le sens positif , donc sa vitesse v>0 à t=0.

Et on a : $v = \dot{x} = -x.\ \omega_0\sin(\omega_0.t + \varphi)$ et à t=o : $v = -x_m.\omega_0\sin\varphi > 0$ $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$

d' où : $\varphi < 0$ donc: $\sin\varphi < 0$

Équation horaire du mouvement: $x = 2.\ 10^{-2} .\cos (10.t - \dfrac{\pi}{3})$