Oscillations électriques forcées en régime sinusoïdal

On a vu dans le régime libre que si un circuit RLC série peut effectuer des oscillations libres, celles-ci cessent plus au moins rapidement a cause de l'amortissement dû à sa résistance.
Quel sera l'effet de l'application d'une tension sinusoïdale aux bornes d'un tel oscillateur, une simple compensation de l'amortissement ou plus ?

1. Réponse d'un circuit RLC série à une tension sinusoïdale

1.1 Production d'oscillations forcées

Expérience

On realise le montage de la figure 1 : il s'agit d'un circuit RLC serie ferme sur un GBF (generateur basse frequence) delivrant une tension sinusoidale u(t) de frequence N reglable :u(t) = Um.sinωt, Um etant maintenue constante.Le circuit RLC serie est constitue d'un resistor de resistance Ro reglable, d'un condensateur de capacite C = 0,47 μF et d'une bobine d'inductance L = 0,2 H et de resistance interne r = 12,5 Ω ((Fig.1).

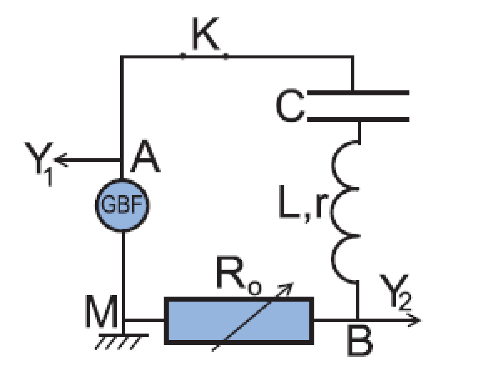


Fig.1 : Circuit RLC série soumis à une tension sinusoïdale

Pour suivre simultanement l'evolution de la tension u délivrée par le GBF entre ses bornes et celle de l'intensité i du courant debite dans le circuit, on relie a un oscilloscope bicourbe, le point M à la masse, le point A à la voie Y1 et le point B à la voie Y2 .
On fixe N a la valeur 400 Hz, Um à 2 V et Ro à 50 Ω par exemple. Lorsque l'interrupteur K est ouvert, on observe sur l'ecran de l'oscilloscope uniquement l'oscillogramme (1) de la figure 2. En fermant le circuit, on observe sur l'écran de l'oscilloscope les oscillogrammes stables (1) et (2) (Fig.2) avec la sensibilite 1 ms/div.

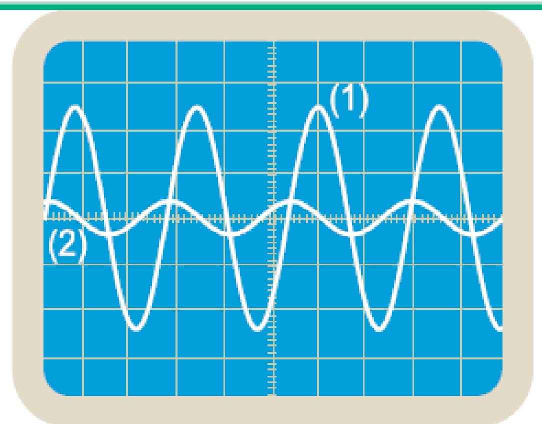


Fig.2 : Oscillogrammes de u et de u_{Ro}.

La fréquence étant toujours égale a 400 Hz, on réalise une série de mesures de U_{Rom} en fonction de Um. Les résultats de mesures ont permis d'obtenir le trace de la figure 3.

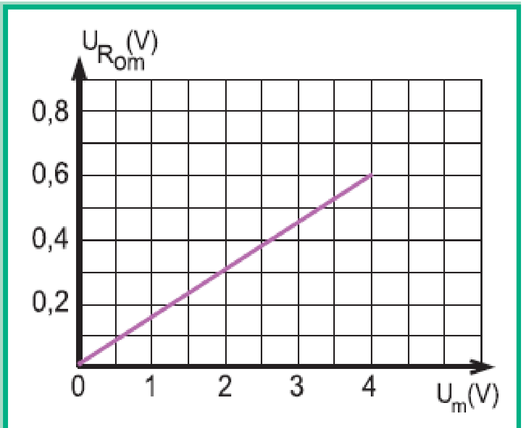


Fig.3 : Tracé de $U_m = f\ (U_{Rom})$

Questions

1°) Comparer la forme de l'oscillogramme représentant i(t) à celle de u(t).

2°) Mesurer la fréquence N de i(t) et la comparer à celle de u(t).

3°) Comparer la fréquence N à la fréquence propre No de l'oscillateur.

4°) **a)** A l'aide de la courbe de la figure 3, montrer que : $Um = kU_{Rom}$, où k est une constante que l'on calculera.

b) Montrer que la tension maximale U_m peut s'écrire en fonction de l'intensité maximale I_m sous la forme : $U_m = Z\ I_m$ où Z est une constante dont on déterminera la dimension.

Commentaire

L'analyse des oscillogrammes de la figure 2 montre que,comme celle de u(t), la courbe représentant i(t) varie sinusoïdalement au cours du temps.

De plus, il y a constamment le même décalage horaire entre les deux oscillogrammes. Par conséquent, l'intensité i(t) varie avec la même fréquence que la tension u(t) imposée par le GBF et non avec la fréquence propre du circuit RLC série : les oscillations imposées par le GBF ne sont plus libres, elles sont forcées. Ainsi, le GBF a joue le rôle d'excitateur.

La forme lineaire de la courbe representant U_{Rom} en fonction de U_m montre que le quotient

$\frac{U_m}{I_m}$ est une constante qui ne depend que des caractéristiques de l'oscillateur. On l'appelle impédance du circuit et on la note Z.

Interprétation théorique

Pour le circuit utilise precedemment, la loi des mailles s'ecrit :

$$u_{BM}+u_{DB}+u_{AD}+(-u_{AM})=0 \quad \text{d'où} \quad u_{AM}=u_{BM}+u_{DB}+u_{AD}$$

donc $u_{AM}=R_0 i+ri+L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}$ or $q=\int idt$

u_{AM} devient : $u_{AM}=R_0 i+ri+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int idt$ et $R = R_0 + r$ avec $\omega = 2\pi N$

$$u_{AM}=Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int idt$$

Une telle équation différentielle à second membre non nul admet comme solution particulière celle du régime permanent : $\boldsymbol{i(t)=I_m \sin(\omega t+\varphi)}$

Conclusion

La réponse d'un circuit RLC série a une tension sinusoidale est un courant alternatif sinusoidal y oscillant :

- à la fréquence N de la tension excitatrice,
- avec une amplitude $\boldsymbol{I_m=\frac{U_m}{Z}}$, où Z est une grandeur physique ayant la dimension d'une résistance appelée impédance du circuit RLC série.

1.2 Déphasage

Définition

On appelle déphasage entre deux fonctions sinusoïdales de phases initiales φ_1 et φ_2 et de même période, la différence de phase $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)$ ou $(\varphi_1 - \varphi_2)$.

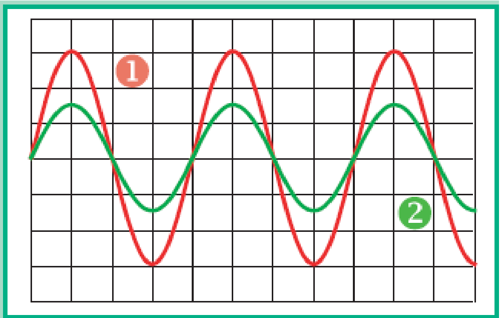


Fig.4a : Tensions u_1 et u_2 en concordance de phase

Les chronogrammes (1) et (2) de chacune des figures (4a) et (4b) représentent deux tensions u_1 et u_2 synchrones (de même période et simultanées) et de phases initiales φ_1 et φ_2.

Dans le premier cas (Fig.4a), u_1 et u_2 sont dites en phase ou en concordance de phase tandis que dans le deuxième cas (Fig.4b), u_1 et u_2 sont dites en opposition de phase.

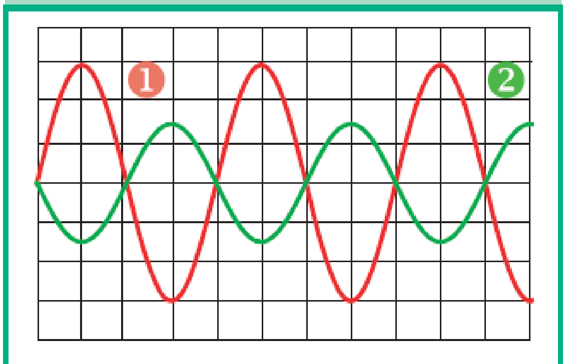


Fig.4b : Tensions u_1 et u_2 en opposition de phase

Les chronogrammes ci-contre montrent que la tension u_2 en quadrature retard sur u_1.

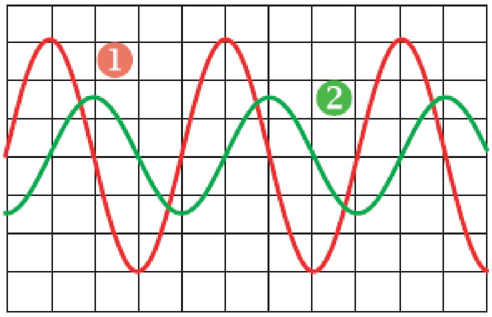


Fig.5a : Tension u_2 en quadrature retard sur u_1

Conclusion

A tout décalage horaire Δt entre deux fonctions sinusoïdales $y_1(t)$ et $y_2(t)$ isochrones (de même période T), représentées dans le même système d'axes, est associé un déphasage Δφ tel que : $|\Delta\varphi| = 2\pi\frac{\Delta t}{T}$

- Si Δt = 0, Δφ = 0 : les deux fonctions sont en concordance de phase.
- Si Δt = $\frac{T}{2}$, Δφ = π rad : les deux fonctions sont en opposition de phase.
- Si Δt = $\frac{T}{4}$, Δφ = $\frac{\pm\pi}{2}$ rad : les deux fonctions sont en quadrature de phase.

Si le déphasage (φ_2 - φ_1) est positif, $y_2(t)$ est en avance de phase par rapport a $y_1(t)$ et inversement.

2. Influence de la fréquence d'excitation sur la réponse d'un circuit RLC série

Expérience

On reprend le montage de la figure1 ou le générateur BF délivre une tension u(t) = $U_m\sin 2\pi Nt$, avec U_m = 2 V. En faisant varier la fréquence N des excitations, on constate qu'a chaque fois, la tension $u_{Ro}(t)$ conserve la meme forme sinusoidale mais avec changement de sa valeur maximale U_{Rom} et de son décalage horaire Δt par rapport à u(t).

Dans une deuxième étape, on réalise une série de mesures de l'intensité maximale I_m et du décalage horaire Δt entre u(t) et i(t) en fonction de la frequence N du GBF.

Les résultats des mesures ont permis d’obtenir :

- le trace de la figure 6a représentant l’évolution de l’amplitude I_m de l’intensité i en fonction de N.

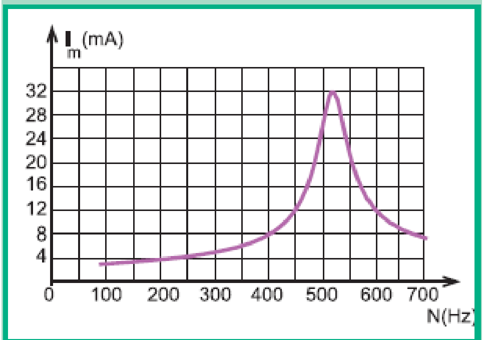


Fig.6a : Evolution de I_m en fonction de N

- le trace de la figure 6b représentant l’évolution de la phase initiale φ de l’Intensité i en fonction de N.

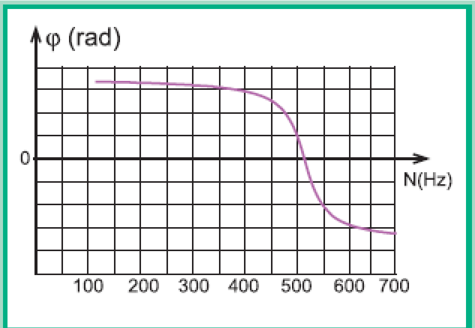


Fig.6b : Evolution de la phase initiale φ en fonction de N

Remarque

Il est pratique aussi de suivre a l’aide d’un ampèremètre l’évolution de l’intensité efficace I en fonction de la fréquence N.

Conclusion

En regime forcé sinusoidal, l’intensite maximale I_m et la phase initiale φ du courant oscillant dans un circuit RLC série dépendent de la fréquence N de la tension excitatrice et des grandeurs R, L et C caractéristiques de l’oscillateur.

La réponse d’un circuit RLC série à une tension sinusoidale de fréquence N égale à la fréquence propre No du circuit est un courant oscillant en phase avec la tension excitatrice et avec l’intensité maximale la plus élevée : c’est la résonance d’intensité.

A la résonance d’intensité, le circuit RLC série se comporte comme un résistor de résistance R.

Interprétation théorique

$i(t) = I_m \sin(\omega t+\varphi)$.

Pour déterminer l'amplitude I_m et la phase initiale φ de i(t), il est commode de recourir a la construction de Fresnel.

Valeur maximale I_m et phase initiale φ de l'intensité i du courant

On a : $Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int idt=U_m\sin(\omega t)$ avec R = R_0 + r

$\frac{di}{dt}=\omega I_m\sin(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$ et $\int idt=\frac{I_m}{\omega}\sin(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2})+cte$ l'équation devient:

$$RI_m\sin(\omega t+\varphi)+L\omega I_m\sin(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})+\frac{I_m}{C\omega}\sin(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2})=U_m\sin(\omega t)$$

Étant une fonction sinusoïdale, $U_m$sinωt ne peut être qu'une somme de fonctions sinusoidales. Donc, cte = 0.

Représentations de Fresnel :

$RI_m\sin(\omega t+\varphi)$ → $\overrightarrow{OA_1}$ [RI_m , φ]

$L\omega I_m\sin(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$ → $\overrightarrow{OA_2}$ $[L\omega I_m,\varphi+\frac{\pi}{2}]$

$\frac{I_m}{C\omega}\sin(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2})$ → $\overrightarrow{OA_3}$ $[\frac{I_m}{C\omega},\varphi-\frac{\pi}{2}]$

$U_m\sin(\omega t)$ → $\overrightarrow{OA}$ [U_m , 0] tel que : $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}$

Les vecteurs de Fresnel $\overrightarrow{OA_2}$ et $\overrightarrow{OA_3}$ étant de sens contraire, il en résulte trois constructions possibles :

- $||\overrightarrow{OA_2}||>||\overrightarrow{OA_3}||$ cas correspondant à $L\omega>\frac{1}{C\omega}$ c'est-a-dire N>N_0 : il donne la construction de la fig 7a.

Le circuit est dit inductif

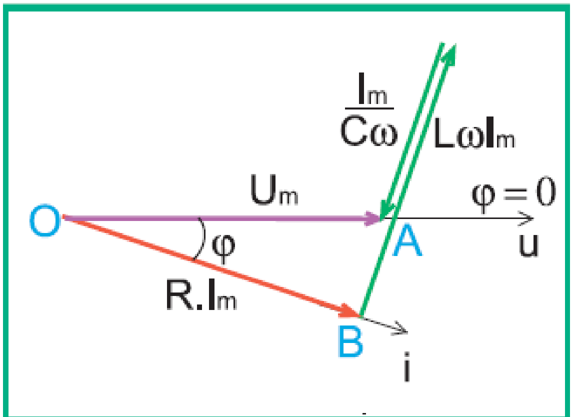


Fig.7a : Cas où $L\omega>\frac{1}{C\omega}$

- $\|\overrightarrow{OA_2}\| < \|\overrightarrow{OA_3}\|$ cas correspondant à $L\omega < \frac{1}{C\omega}$ c'est-à-dire $N < N_0$: il donne la construction 7b.

Le circuit est dit capacitif

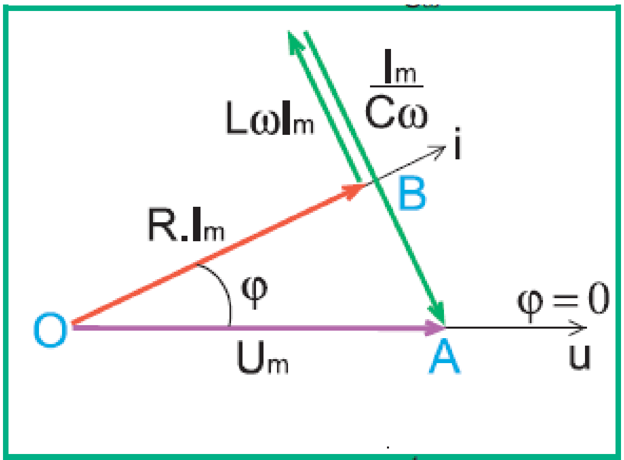
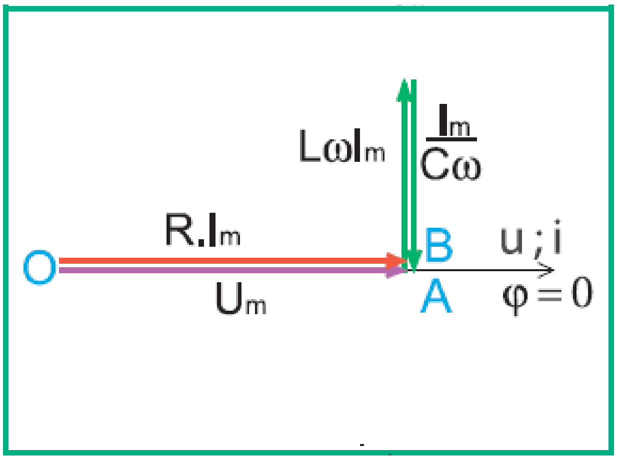


Fig.7b : Cas où $L\omega < \frac{1}{C\omega}$

- $\|\overrightarrow{OA_2}\| = \|\overrightarrow{OA_3}\|$ cas correspondant à $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ c'est-à-dire $N = N_0$ il donne la construction 7c.

Résonance d'intensité

Le circuit est dit résistif



Dans le cas général : $U_m^2 = (RI_m)^2 + (L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega})^2$ d'où $U_m = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}\, I_m$

donc $I_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$

soit $I_m = \frac{U_m}{Z}$ avec $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ l'impédance du circuit.

D'après la figure 7a, $L\omega > \frac{1}{C\omega}$, on a φ < 0 ça signifie que l'intensité i(t) est en retard de phase par rapport à la tension excitatrice u(t) : le circuit RLC est inductif.

D'après la figure 7b, $L\omega < \frac{1}{C\omega}$, on a φ > 0 ça signifie que l'intensité i(t) est en avance de phase par rapport à la tension excitatrice u(t): le circuit RLC est capacitif.

D'après les constructions précédentes: $|\tan\varphi| = \frac{|L\omega - \frac{1}{C\omega}|}{R}$ en tenant compte de la dépendance du signe de φ de celui $(L\omega - \frac{1}{C\omega})$ la phase initiale de i est telle que: $\mathbf{\tan\varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R}}$ avec $\frac{-\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

on peut tenir compte aussi, $\mathbf{\cos\varphi = \frac{R}{Z}}$

Résonance d'intensité

L'impédance du circuit s'écrit : $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$

Aux très basses pulsations ainsi qu'aux pulsations beaucoup plus élevées que la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur, l'écart entre Lω et $\frac{1}{C\omega}$ augmente. Par suite , l'impédance devient de plus en plus grande.

Donc, dans l'un ou dans l'autre cas, $I_m(\omega) = \frac{U_m}{Z} \rightarrow 0$ ce qui signifie que la réponse du circuit RLC série devient de plus en plus faible. Cette réponse s'améliore lorsque

Z prend une valeur modérée, ce qui n'est possible qu'avec des valeurs comparables de $L\omega$ et de $\frac{1}{C\omega}$.

Dans le cas où $L\omega=\frac{1}{C\omega}$ obtenu avec $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, l'impédance Z est minimale $Z = R$ Par conséquent, l'intensité maximale prend sa valeur la plus élevée $I_{m0}=\frac{U_m}{R}$ c'est la résonance d'intensité.

$$\tan\varphi=\frac{\frac{1}{C\omega}-L\omega}{R} = 0$$ ce qui signifie que la tension u et l'intensité sont en phase.

L'appellation d'un oscillateur en régime forcé comme étant un résonateur revient au phénomène de résonance

La réponse d'un circuit RLC serie a une tension sinusoïdale de fréquence N égale a la fréquence propre No du circuit est un courant oscillant en phase avec la tension excitatrice et avec l'intensité maximale la plus élevée : c'est la résonance d'intensité.

$$N = N_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} : \text{ Résonance d'intensité } \Leftrightarrow \begin{cases} I_m \text{ est la plus élevée} \\ u \text{ et } i \text{ sont en phase} \end{cases}$$

3. Puissance moyenne et facteur de puissance

Puissance moyenne

La puissance moyenne d'un dipôle D est la valeur moyenne prise par sa puissance instantanée p(t) sur une très grande durée Δt (tendant vers l'infini).

Lorsque p(t) est périodique, il est équivalent de prendre Δt égale à une période.

La puissance moyenne $P = UI\cos\varphi$

avec **$\cos\varphi$ s'appelle facteur de puissance**