Pendule simple

Théorie du pendule simple

Le pendule simple étudié est formé par :

- un fil inextensible de masse négligeable et de longueur ℓ;
- et une bille de masse m accrochée à l'extrémité du fil.

Si on écarte le pendule d'un angle θ_0 par rapport à la verticale et qu'on lâche le pendule, celui-ci se met à osciller. Déterminons l'équation vérifiée par l'angle θ(t) que fait le fil avec la position verticale à l'instant t.

Pour cela faisons quelques hypothèses simples :

- Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen ;
- On assimile la bille à un point matériel M qui ne subit que deux forces : le poids $\vec{P}=m\vec{g}$

et la tension du fil $\vec{T}$.

En vertu du principe fondamental de la dynamique, on a: $\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$ (1)

Dans la base de Frenet (formée d'un vecteur tangentiel $\vec{\tau}$ dirigé dans le sens du mouvement et d'un vecteur normal $\vec{n}$ dirigé vers le point de suspension du pendule), les vecteurs vitesse et accélération s'écrivent:

$$\vec{v}=l\dot{\theta}\vec{\tau} \quad \text{et} \quad \vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+\frac{v^2}{l}\vec{n}$$

Projetons maintenant le Principe Fondamental de la Dynamique dans la base de Frenet:

$$\text{sur } \vec{\tau} \text{ : ml } \ddot{\theta}=-mg\sin\theta \quad (2)$$

$$\text{sur } \vec{n} \text{ : ml } \dot{\theta}^2=T-mg\cos\theta \quad (3)$$

L'équation (3) nous permet d'obtenir la tension du fil, tandis que l'équation (2) nous donne l'équation différentielle du mouvement:

$$\ddot{\theta}+\omega_0^2\sin\theta=0 \; avec \; \omega_0^2=\frac{g}{l} \quad (4)$$

Le terme en sinθ, rend cette équation différentielle non linéaire.

1) Cas des petits angles:

Pour de petites oscillations, on peut assimiler sin θ à θ. L'équation différentielle devient alors

$$\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0 \quad (5)$$

On reconnaît l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique que l'on a déjà rencontré dans l'étude du pendule élastique. On sait donc que la solution est du type $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)$: le pendule oscille de façon périodique avec une période propre

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

2) Cas des grands angles

Pour des oscillations de grande amplitude, le comportement s'écarte de l'oscillateur harmonique à cause de la présence du terme non linéaire (sin θ). De ce fait, les oscillations ne sont plus sinusoïdales et la période de celles-ci dépend de l'amplitude θ_0. La formule de Borda est une formule approximative qui donne la période des oscillations pour des amplitudes ne dépassant pas les 60° :

$$T = T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right) avec\ \theta_0\ en\ radian$$