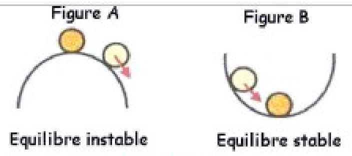
Pendule élastique

Un **«Oscillateur mécanique** ou P*endule élastique»*, ou système solide-ressort, est constitué d'un solide, de masse m , fixé à un ressort ,de longueur initiale

Oscillateur mécanique car «Tout mobile effectue un mouvement de va et vient autour de sa position d'équilibre stable».



Nous déplaçons légèrement la bille de sa position d'équilibre,

- **La figure A :** elle se met à rouler et ne reviendra pas à sa position de départ. L'équilibre est instable.
- **La figure B :** elle revient dans sa position de départ. L'équilibre est dit stable.

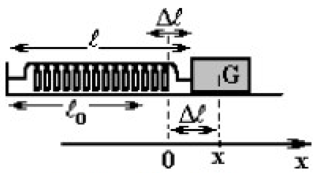
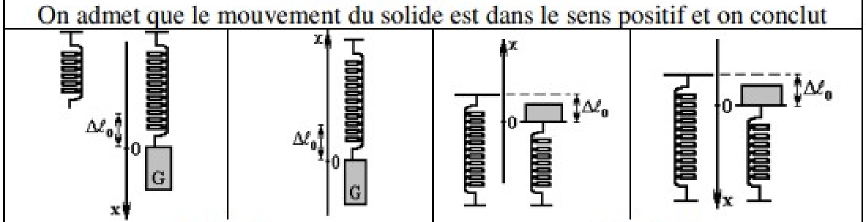
I.Pendule Elastique

Un pendule élastique, ou **système solide-ressort,** est constitué d'un solide, de masse m , fixé à un ressort ,de longueur initiale ℓ_0 et de raideur K, dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe.

1. La Tension de ressort

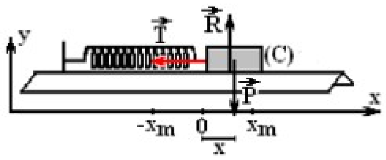
$T=K.\Delta\ell$	$\Delta\ell=\ell-\ell_0$	ℓ_0	K
Tension du ressort (N)	Allongement du ressort (m)	Longueur initiale ℓ_0 (m)	Raideur du ressort (N/m)

Expression de $\Delta\ell$

<table>
<tr><td rowspan="3">Ressort horizontal

Ressort horizontal initialement non allongé et fixé directement au mobile ou au moyen d'un fil inextensible et de masse négligeable
$\Delta\ell=x$</td><td colspan="4">Ressort vertical ou incliné
On admet que le mouvement du solide est dans le sens positif et on conclut</td></tr>
<tr><td colspan="4">
$\Delta\ell=\ell-\ell_0$ $\Delta\ell=\ell_0-\ell$</td></tr>
<tr><td>Si le ressort s'allonge alors
$\Delta\ell=\Delta\ell_0+x$</td><td>Si le ressort se compresse alors
$\Delta\ell=\Delta\ell_0-x$</td><td>Si le ressort s'allonge alors
$\Delta\ell=\Delta\ell_0-x$</td><td>Si le ressort se compresse alors
$\Delta\ell=\Delta\ell_0+x$</td></tr>
</table>

2. Equation différentielle :

Un solide, de masse m sur un banc à coussin d'air horizontal, fixé à un ressort à spires non jointives, de longueur initiale ℓ_0 et de raideur K,



Système : Solide (C)
Bilan des forces :

- $\vec{T}$: Tension du ressort
- $\vec{R}$: Réaction du plan horizontal
- $\vec{P}$: Poids du corps (C)

En appliquant la 2eme loi de Newton : $\sum\vec{F}=m.\vec{a}_G$

$$\vec{T}+\vec{R}+\vec{F}=m.\vec{a}_G$$

$$\vec{T}\begin{pmatrix}T_x=-T\\T_y=0\end{pmatrix}\text{ et }\vec{P}\begin{pmatrix}P_x=0\\P_y=-P=-m.g\end{pmatrix}\text{ et }\vec{R}\begin{pmatrix}R_x=0\\R_y=R\end{pmatrix}\text{ et }\vec{a}_G\begin{pmatrix}a_x=\ddot{x}\\a_y=0\end{pmatrix}$$

Sur l'axe Ox : $T_x+R_x+P_x=m.a_x$

$$-T=m.\ddot{x}\text{ et }-K.\Delta\ell=m.\ddot{x}\text{ et }-K.x=m.\ddot{x}\text{ d'où }-\frac{K}{m}.x=\ddot{x}$$

donc $\ddot{x}+\frac{K}{m}.x=0$: Equation différentielle de mouvement du centre d'inertie G

L'équation différentielle est de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 . x = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ ou bien $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ **(en rad/s)**

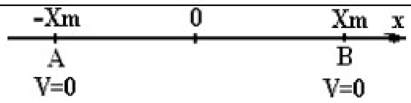
3. Equation horaire ou la solution de l'equation différentielle :

$x = x(t) = Xm.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$ **ou bien** $x=x(t)=X_m.\cos(\omega_0.t+\varphi)$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	avec	**x(t)** : l'abscise (élongation) du point G et varie entre Xm et -Xm **X_m** : Amplitude ou élongation maximale **ω_0** : pulsation (rad/s) **T_0** : la période (s) **$\omega_0.t+\varphi$** : Phase à l'instant t **φ** : Phase à l'origine des temps t=0

Déterminer les constantes X_m , T_0 et φ :

⁂ Comment déterminer Xm

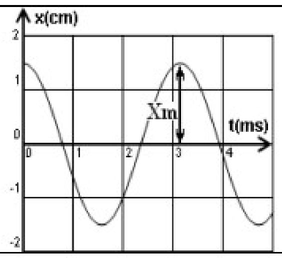
1. Phrase



- On écarte le corps de 2cm de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale
  Xm=2cm
- Le corps oscille entre deux points A et B distante de AB=4cm
  Xm = 2cm d'où AB = 2.Xm = 4cm

2. Graphiquement

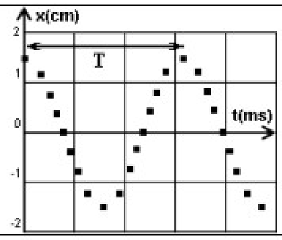
2.1. Par rapport à l'axe temps



Xm=1.5cm

⁂ Comment déterminer la période propre T_0

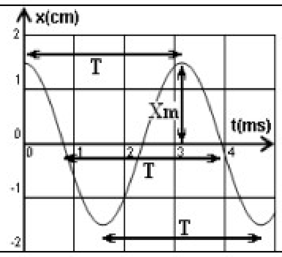
3. Enregistrement



τ : la durée entre l'enregistrement de deux points successifs

T=16.τ

4. Graphiquement x=f(t)



Attention à la lecture et à l'échelle

T_0=3.2ms

⁂ Comment déterminer la phase à l'origine φ

$x = x(t) = Xm.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$: l'équation horaire $V_x = \dot{x}(t) = -Xm.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$

: l'expression de la composante du vecteur vitesse V_x et $\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$ sont opposées (ont des signes différants)

$x_0 = x(0) = Xm.\cos(\varphi)$ d'où $\cos(\varphi) = \frac{x(0)}{Xm}$ à l'instant t= 0 $V_{0x} = V(0) = \dot{x}(0) = -Xm.\frac{2\pi}{T_0}.\sin(\varphi)$

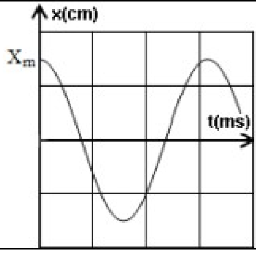
V_x à l'instant t=0 et $\sin(\varphi)$ sont opposées (ont des signes différants) On en conclut que V_x à l'instant t=0 et φ sont opposées aussi

En comparant le sens de mouvement avec le sens positif de l'axe, on détermine le signe de $\mathbf{V_x}$ la composante de la vitesse et on en déduit le signe de la phase φ

(2)	(3)	(1)
-Xm	0	Xm x
x= -Xm	x=0	x=Xm
V=0	V=V_m	V=0

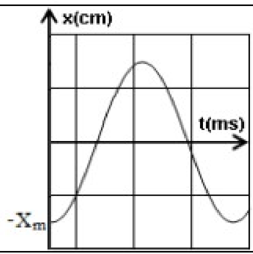
1er cas :

(1) On écarte le corps, dans le sens positif, de Xm de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps

Xm x x=Xm V=0	$x(0) = X_m$ $\cos(\varphi) = \frac{x(0)}{Xm} = 1$ d'où $\varphi = 0$	

2em cas :

(2) On écarte le corps, dans le sens négatif, de Xm de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps

-Xm x x= -Xm V=0	$x(0) = -X_m$ $\cos(\varphi) = \frac{x(0)}{Xm} = 1$ d'où $\varphi = \pi$	

4. Expression de la période propre T_0 :

$$x = x(t) = Xm.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) \text{ : l'équation horaire}$$

On dérive deux fois par rapport au temps t :

$$\dot{x} = -x_m\frac{2\pi}{T_0}.sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi_0\right) \quad \ddot{x} = -x_m\frac{4\pi^2}{T_0^2}.cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi_0\right) = -\frac{4\pi^2}{T_0^2}.x \quad \ddot{x} + \frac{4\pi^2}{T_0^2}.x = 0$$

On compare cette expression avec l'équation différentielle , on déduit que pour que soit une solution de l'équation différentielle ,

$$x(t) = x_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi_0\right) \quad \text{il suffit que} \quad \frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{K}{m} \quad \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

I. Etude Energitique

Energie du système est la somme des énergies de ses composantes

1. Energie cinétique :

$$x = Xm.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) \quad \text{et} \quad V_x = -Xm.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad Ec = \frac{1}{2}m.V^2$$

--Xm	0	Xm x
Ec=0	Ec=Ec_m	Ec=0
V=0	V=V_m	V=0

- Si x=Xm ou x=-Xm alors l'énergie cinétique est nulle donc la vitesse est nulle et l'oscillateur s'arrête et change le sens de son mouvement
- Si x= 0 alors l'oscillateur passe par sa position d'équilibre et son énergie cinétique est maximale et sa vitesse l'est aussi

2. Energie potentielle :

L'énergie potentielle (de position), définie à une constante arbitraire près, ne dépend que de la position du corps dans l'espace.

❖ **Energie potentielle élastique Ep_e**

$$Ep_e = \frac{1}{2}.K.\Delta\ell^2 + C$$

La constante C est déterminé à partir d'un cas référentiel de l'énergie potentielle $Ep_e=0$

Si le pendule élastique est horizontal alors $\Delta\ell = x$ alors

$$Ep_e = \frac{1}{2}.K.x^2 + C$$

On considère le plan vertical passant par la position d'équilibre comme repère de l'énergie potentielle élastique $x=0$ et $Ep_e=0$ d'où $C=0$ alors

$$Ep_e = \frac{1}{2}.K.x^2$$

❖ **Energie potentielle de pesanteur Ep_P**

$$Ep_P = m.g.Z.+C$$

La constante C est déterminé à partir d'un cas référentiel de l'énergie potentielle $Ep_P=0$

On considère le plan vertical passant par la position d'équilibre comme repère de l'énergie potentielle élastique $z=0$ et $Ep_p=0$ d'où $C=0$ alors

$$Ep_P = m.g.Z$$

NB :
Pour un pendule élastique horizontal $Ep_p=0$

Conclusion : $Ep = \frac{1}{2}.K.x^2$

$$\text{On a } x = Xm.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right) \text{ alors } Ep = \frac{1}{2}K.Xm^2.\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)$$

3. Expresion de la variation de l'énergie potentielle :

ΔEp_e : Variation de l'énergie potentielle élastique	ΔEp_p : Variation de l'Energie potentielle de pesanteur
$\Delta Ep_e = \frac{1}{2}.K.\left(\Delta\ell_2^2 - \Delta\ell_1^2\right) = -W_{1\to2}(\vec{T})$	$\Delta Ep_p = m.g.(Z_2 - Z_1) = -W_{1\to2}(\vec{P})$

4. Energie mécanique :

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, Em = Ec + Ep

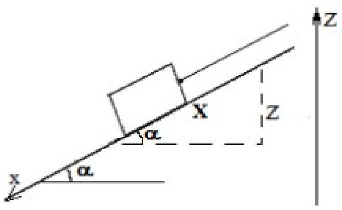
$Em = \frac{1}{2}.m.V^2 + \frac{1}{2}.K.x^2 + C$ Pour les conditions décrites avant on peut écrire : $Em = \frac{1}{2}.m.V^2 + \frac{1}{2}.K.x^2$

5. Le cas du pendule élastique incliné ou verctical

X : la distance que parcours le corps sur le plan incliné et elle constitue l'hypoténuse du triangle

Les deux axes sont opposés et
$Z = -X.\sin(\alpha)$

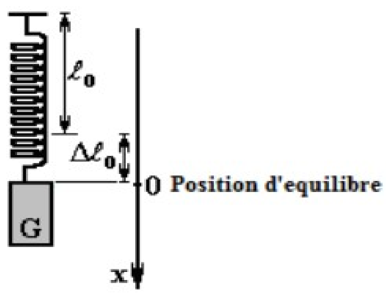
NB : si on change l'orientation de l'axe z
- L'expression de l'énergie potentielle varie
  $Ep_p = Ep_p(Z) = -m.g.Z.+C$
- La relation entre abscisse varie aussi
  $Z = X.\sin(\alpha)$



1. $Ep_p = Ep_p(Z) = m.g.Z.+C$
2. Déterminer l'expression de la constante C
   - Déterminer le plan horizontal référentielle de l'énergie potentielle Epp=0
   - Déterminer l'abscisse correspondant Z_0
     $Z = Z_0$ et $Ep_p(Z_0) = 0$

D'ou
$$Ep_p(Z_0) = m.g.Z_0.+C=0$$
donc
$$C = -m.g.Z_0$$

3. On remplace C par son équivalent et on obtient alors
   $Ep_p = Ep_p(Z) = m.g.Z - m.g.Z_0$
   $Ep_p = Ep_p(Z) = m.g.(Z - Z_0)$



Energie potentielle élastique

1. $Ep_e = \frac{1}{2}.K.\Delta\ell^2 + C$

Déterminer l'expression de $\Delta\ell$ en fonction de x soit $\Delta\ell = \Delta\ell_0 + x$

2. Déterminer la constante C
   - Déterminer le plan référentiel de l'Energie potentielle $Ep_e=0$
   - Déterminer l'abscisse correspondant x_0
     $x = x_0$ et $Ep_e(x_0) = 0$

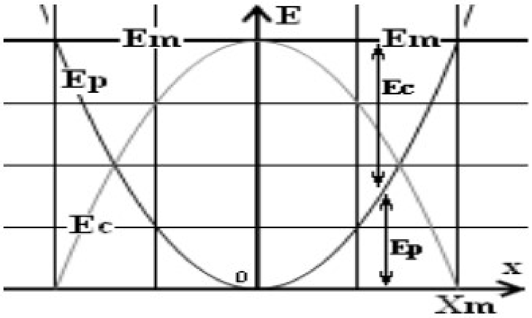
$$\text{D'où } Ep_e(x_0) = \frac{1}{2}.K.(\Delta\ell_0 + x_0)^2 + C = 0$$
$$\text{Donc } C = -\frac{1}{2}.K.(\Delta\ell_0 + x_0)^2$$

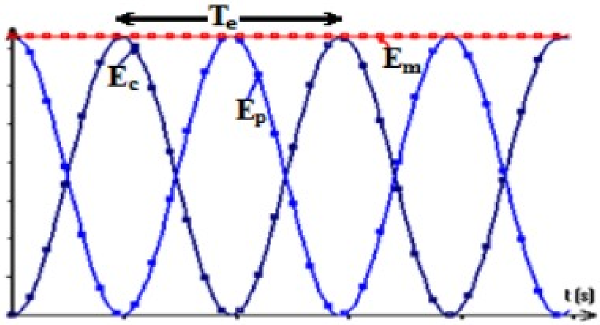
3. Remplacer dans l'expression de Ep_e

$$Ep_e = \frac{1}{2}.K.\Delta\ell^2 + C = \frac{1}{2}.K.(\Delta\ell_0 + x_0)^2 + C$$

6. Les graphes d'energies :

- Au point x=Xm on a $Em=Ep_{max}$
- Au passage par la position d'equilibre x=0 on a $Em=Ec_{max}$





$T_0 = 2.Te$: La période des oscillations T_0 est le double de la période des énergies Te

NB :

S'il existe frottement alors l'amplitude des oscillations diminue par dissipation (perte) de l'énergie mécanique au cours du temps