Étude de quelques mouvements particuliers

A. Le vecteur position

1- Un référentiel est un solide

On peut en extraire un point origine O, et trois vecteurs non coplanaires $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$

$(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ forme alors lui-même un référentiel.

Si les trois vecteurs sont deux à deux orthogonaux, et de norme 1, on les note avec des minuscules et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$forme un référentiel orthonormal.

Exemple

Le référentiel terrestre est lié à la Terre. Définir deux référentiels orthonormaux distincts, l'un de centre un point S du sol terrestre, et un de centre confondu avec le centre O_T de la Terre.

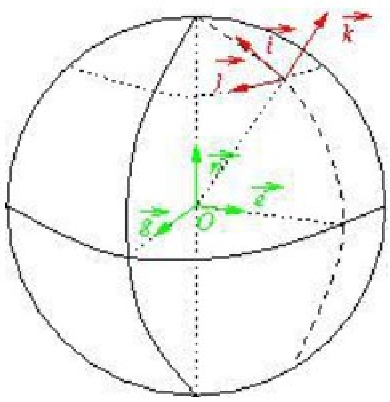
Correction:

- En S**,** on peut définir trois vecteurs de norme 1: $\vec{i}$ dirigé vers le Nord, $\vec{j}$ dirigé vers l'ouest et $\vec{k}$ vertical dirigé vers le haut.

$(S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forme un référentiel terrestre orthonormal.

- Autour de O_T , on peut définir trois vecteurs de norme 1: $\vec{n}$ dirigé vers le pôle Nord, $\vec{g}$ dirigé vers le point équatorial du méridien de Greenwich et $\vec{e}$ dirigé vers le point de l'équateur du méridien 90° est (il passe au milieu du golfe du Bengale).

$(O_T, \vec{n}, \vec{g}, \vec{e})$ forme un référentiel terrestre orthonormal.



2- Le vecteur position

Le vecteur position est le vecteur qui définit la position d'un point mobile M à une date t donnée.

Dans le référentiel (orthonormal) $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

on peut alors écrire:

$$\vec{OM}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

On peut alors écrire: $\vec{OM}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

Exemple:

Si O est un point du sol terrestre, dans le repère terrestre orthonormal terrestre $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $\vec{k}$ est un vecteur vertical dirigé vers le haut, quels noms donne-t-on aux coordonnées x, y, et z?

Correction: x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z est la côte ou l'altitude.

B. Vecteurs vitesse et accélération

1- Le vecteur vitesse

Le vecteur vitesse a pour direction la tangente à la trajectoire, pour sens celui du déplacement du point M étudié, pour norme la vitesse instantanée de M, exprimée en $m.s^{-1}$

Il est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\vec{OM}$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt}(t)$$

Dans le repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ associé au référentiel d'étude, ses coordonnées sont égales aux dérivées par rapport au temps des coordonnées de $\vec{OM}$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) = \frac{dx}{dt}(t) \\ v_y(t) = \frac{dy}{dt}(t) \\ v_z(t) = \frac{dz}{dt}(t) \end{pmatrix}$$

Exemple:

a) Déterminer le vecteur vitesse pour le point M dont le mouvement est défini par les équations horaires:

$$\vec{OM}(t)\begin{pmatrix} x(t) = 2t \\ y(t) = -5t^2 + 3t + 2 \\ z(t) = 0 \end{pmatrix}$$

b) Calculer la norme de la vitesse à l'instant t = 1s

Correction:

a) On calcule les dérivées

$\frac{dx}{dt}(t) = 2$
$\frac{dy}{dt}(t) = -5 \times 2t + 3 = -10t + 3$
$\frac{dz}{dt}(t) = 0$

donc $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -10t+3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b. On calcule

$\vec{v}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $v(1) = \|\vec{v}(1)\| = \sqrt{2^2 + (-7)^2 + 0^2}$

soit $v(1) = \sqrt{53} = 7,3 \text{ s}$

2. Le vecteur accélération

Le vecteur accélération a pour direction et sens ceux de l'inflexion du vecteur vitesse, et pour norme l'accélération instantanée de M, exprimée en $m.s^{-2}$

Pour comprendre le sens physique de l'accélération, on peut l'exprimer en «mètres par seconde par seconde». Ainsi, l'accélération de la pesanteur, qui est en particulier celle d'un mobile qu'on laisse chuter verticalement, vaut environ 10mètres par seconde, soient $36km.h^{-1}$ par seconde. On en déduit que lors de la chute libre verticale d'un mobile, sa vitesse augmente de $36km.h^{-1}$chaque seconde. Si sa vitesse est nulle à l'instant initial, elle vaut (en négligeant les frottements) $36km.h^{-1}$ au bout d'une seconde, $72km.h^{-1}$ au bout de deux secondes, $108km.h^{-1}$ au bout de trois secondes, etc.

Il est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse $\vec{v}$, donc à la dérivée seconde de

$\vec{OM}$ $\quad\quad$ $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}(t)$

Dans le repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ associé au référentiel d'étude, ses coordonnées sont égales aux dérivées par rapport au temps des coordonnées de $\vec{v}$, donc aux dérivées secondes de $\vec{OM}$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t) \\ a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}(t) = \frac{d^2y}{dt^2}(t) \\ a_z(t) = \frac{dv_z}{dt}(t) = \frac{d^2z}{dt^2}(t) \end{pmatrix}$$

Exemple:

Déterminer le vecteur accélération pour le point M dont le mouvement est défini par les équations horaires (dans l'exemple précédent):

$$\vec{OM}(t) \begin{pmatrix} x(t) = 2t \\ y(t) = -5t^2 + 3t + 2 \\ z(t) = 0 \end{pmatrix}$$

Correction:

On a déjà établi que

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -10t+3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3- Construction graphique

On dispose d'un chronogramme, c'est à dire d'un document graphique donnant les positions successives de M à des dates régulièrement espacées, t = 0, t = Ꞇ, t = 2 Ꞇ, …, t = k Ꞇ, … où Ꞇ est une durée (le pas temporel du chronogramme) et k un nombre entier naturel.

Pour k $\geq$ 1, on obtient une bonne estimation du vecteur vitesse à la date k Ꞇ par:

$$\vec{v}(k\tau) \simeq \frac{O\vec{M}((k+1)\tau) - O\vec{M}((k-1)\tau)}{2\tau}$$

soit $\vec{v}(k\tau) \simeq \frac{M((k-1)\tau)\vec{M}((k+1)\tau)}{2\tau}$

Voici le procédé de construction:

* On construit le vecteur $M((k-1)\tau)\vec{M}((k+1)\tau)$ joignant les points avant et après $M(k\tau)$

* Sa direction et son sens sont ceux du vecteur vitesse $\vec{v}(k\tau)$

On mesure la norme du vecteur $M((k-1)\tau)M((k+1)\tau)$, celle du vecteur vitesse est égale à

$$v(k\tau) \simeq \frac{M((k-1)\tau)M((k+1)\tau)}{2\tau}$$

On calcule cette norme

- On choisit une échelle de représentation graphique $1 m.s^{-1} \leftrightarrow$ q cm

- On trace le vecteur vitesse à partir de M(k Ꞇ) avec la direction, le sens, et la longueur donnée par l'échelle choisie.

On procède de même pour tracer une estimation du vecteur accélération.

$$\vec{a}(k\tau) \simeq \frac{\vec{v}((k+1)\tau) - \vec{v}((k-1)\tau)}{2\tau}$$

Exemple:

Sur le document suivant, pour déterminer $\vec{v}(3\tau)$, on construit le vecteur $M(2\tau)\vec{M}(4\tau)$, il mesure environ 2,4cm, on en déduit que:

$$v(3\tau) \simeq \frac{0{,}025}{2\times 0{,}2} = 0,12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

On construit donc à l'échelle un vecteur d'environ 1,2 cm, à partir du point $M(3\tau)$, parallèle et de même sens que $M(2\tau)\vec{M}(4\tau)$