Vecteurs et points de l’espace

1. Vecteurs de l’espace

1.1 Définition et propriétés

1.1.1 Définition

Comme dans le plan, un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- sa direction (la droite (AB))

- son sens (de A vers B)

- sa norme (la distance AB)

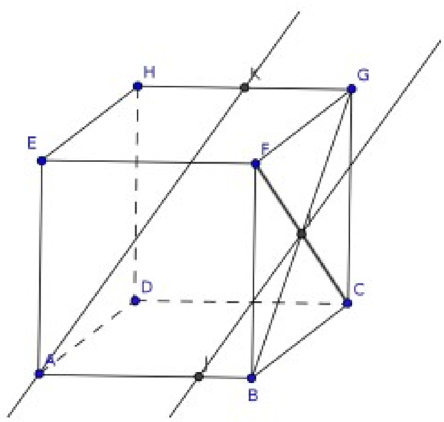
1.1.2 Opérations

Toutes les propriétés du vecteur dans le plan restent valables dans l’espace.

- On peut additionner deux vecteurs,
- On peut multiplier un vecteur par un scalaire,
- L’opposé du vecteur $\vec{u}$ est $-\vec{u}$. En particulier, $-\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{BA}$
- La relation de Chasles reste valable dans l’espace.

Exemple

On considère un cube ABCDEFGH et les points I, J et K tels que I et le centre de la face BCGF, K est le milieu de [HG] et $\overrightarrow{BJ}$ = $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.



- $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{BC}$

- $\overrightarrow{AB}+AD=\overrightarrow{AC}$

- $\overrightarrow{AH}=-\overrightarrow{GB}$

1.1.3 Propriétés

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si ABCD est un parallélogramme

- Pour tout point A et pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique point B tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.
- Pour tout point A, B, C de l'espace, la relation de Chasles reste valable ; c'est-à-dire $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
- La notion de colinéarité reste valable dans dans l'espace c'est à dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k non nul tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.
- Deux vecteurs de l'espace sont orthogonaux si leurs directions sont perpendiculaires.
- Bref, les règles de calculs sur les vecteurs du plan restent valables dans l'espace.

1.2 Vecteurs coplanaires

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si les points A, B, C et D de l'espace qui vérifient $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$ appartiennent au même plan.

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si deux au moins de ces trois vecteurs sont colinéaires ou bien, un vecteur est combinaison linéaire des deux autres.

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ non coplanaires constituent une base de l'espace.

1.3 Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k vérifiant $\vec{u} = k\vec{v}$.

1.4 Produit scalaire dans l'espace

1.4.1 Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. A, B, C, D quatre points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$. On peut trouver au moins un plan qui contient les points A, B, C, D, donc qui contient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le produit scalaire $\vec{u} \bullet \vec{v}$ de l'espace se ramène alors au produit scalaire dans le plan.

Ainsi par exemple, pour deux vecteurs orthogonaux, le produit scalaire est nul

1.4.2 Propriétés

Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan sont encore valables dans l'espace .

1.4.3 Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul .

1.5 Produit vectoriel de deux vecteurs

1.5.1 Définition

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteur, le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur tel que :

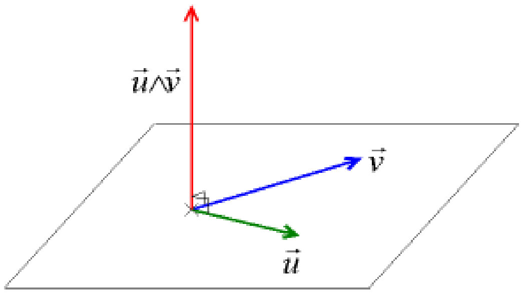
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires,

 - le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;

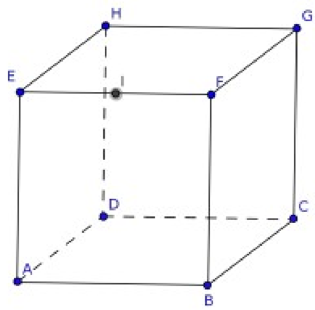
 - la base ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$) est directe ;

- La norme du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est : || $\vec{u} \wedge \vec{v}$ || = || $\vec{u}$ || || $\vec{u}$ || sin α (où α est la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ avec $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$)



1.5.2 Exemple

ÀBCDEFGH est un cube de l'espace orienté .



$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BF}$

1.5.3 Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul .
- $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$

2. Points de l'espace

2.1 Repère de l'espace

Un repère de l'espace est constitué d'un point O, appelé origine, et de trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ non coplanaires. On note alors (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) ce repère.

Comme dans le plan , le repère est orthonormé si la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est orthonormé, c'est-à-dire :

|| $\vec{i}$ ||= || $\vec{j}$ || = $\|\vec{k}\|$ = 1 et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux.

Pour tout point M, il existe un unique triplet (x; y; z) appelé coordonnées du point M de réels tels que

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{k}$. x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z est la cote du point M dans ce repère.

On note M(x;y;z).

2.2 Milieu et composantes

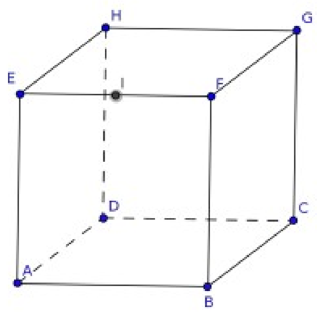
L'espace est muni d'un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) .On donne A(x_A ; y_A ; z_A), B(x_B ; y_B ; z_B)

Les coordonnées du milieu I du segment [AB] sont : $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}; y_I = \frac{y_A + y_B}{2}; z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

Les composantes du vecteur $\vec{AB}$ sont : $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

2.3 Exemple

ÀBCDEFGH est un cube de l'espace orienté .



On peut considérer le repère (A , $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AE}$) . Ce repère est orthonormé et on a ;

A(0,0,0) ; B(1,0,0) ; H(0,1,1)

$$\vec{BH}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.4 Expression analytique du produit scalaire

2.4.1 Expression

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) .

On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

$\vec{u} \bullet \vec{v}$ = aa' + bb' + cc'

2.4.2 Conséquences

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$, c'est-à-dire aa' + bb' + cc' = 0.
- Le vecteur $\vec{u}$ a pour norme : $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
- Si A(x_A ; y_A ; z_A), B(x_B ; y_B ; z_B) , AB = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

2.5 Expression analytique du produit vectoriel

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$. Les composantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont : $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}bc'-cb'\\ca'-ac'\\ab'-ba'\end{pmatrix}$

Pour le calcul pratique, on utilise la disposition $\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}b & b'\\c & c'\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}c & c'\\a & a'\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}c & a\\b & b'\end{vmatrix}\end{pmatrix}$

Exemple

Le produit vectoriel de $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$ est $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}-13\\8\\-22\end{pmatrix}$ car

$\begin{vmatrix}1 & -5\\-2 & -3\end{vmatrix}=-13$; $\begin{vmatrix}-2 & -3\\4 & 2\end{vmatrix}=8$; $\begin{vmatrix}4 & 2\\1 & -5\end{vmatrix}=-22$