Similitude plane : Fiche 3

Comment caractériser une transformation f d'écriture complexe z' = az +b ?

Méthode

Cas où $a \in IR$

a =1 : f est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b

a ≠1 : f est une homothétie d'angle θ = arg a, de centre $\Omega(z_\Omega = \frac{b}{1-a})$

Cas où $a \notin IR$

|a| =1 : f est une rotation d'angle θ = arg a, de centre $\Omega(z_\Omega = \frac{b}{1-a})$

|a| ≠1 : f est une similitude directe d'angle θ = arg a,

de rapport k = | a | , de centre $\Omega(z_\Omega = \frac{b}{1-a})$

Rappels :

- Ne pas confondre l'application affine f et l'application complexe F associée.

- Une rotation est une similitude directe de rapport k=1.

- Une homothétie est une similitude directe d'angle 0 ou π

Exemples d'application

- **Exemple 1**

  Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
  Soit f l'application de P dans P dont l'écriture complexe est : z ' = (1 − i) z − 2.
  Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

Réponses non détaillées

L'écriture complexe de f est de la forme $z' = az+b,\ a \in \mathbb{C}^*$, f est donc une similitude directe.

Le centre Ω est d'affixe $z_\Omega = \frac{-2}{1-(1-i)} = 2i$.

Le rapport $k = |1-i| = \sqrt{2}$.

Et l'angle $\theta = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$.

- **Exemple 2**

  Soit f l'application de P dans P dont l'écriture complexe est :

  $$z' = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})z + i$$

  Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

Réponses non détaillées

L'écriture complexe de f est de la forme z '=az+b, avec $a = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

On vérifie que |a|=1, f est donc une rotation.

Le centre Ω est d'affixe $z_\Omega = \frac{i}{1-(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.

Et l'angle $\theta = \arg\ (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}$.

- **Exemple 3**
  Soit f l'application de P dans P dont l'écriture complexe est : z' = -3z+1+i.
  Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

Réponses non détaillées
L'écriture complexe de f est de la forme z '=az+b, avec a = -3.
Comme a est réel, f est donc une homothétie.
Le centre Ω est d'affixe $z_\Omega = \frac{1+i}{1-(-3)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$.

Le rapport k=-3.

Exercices proposés

- **Exercice 1 :**
  a) Soit F l'application définie dans C par z' = 2iz+1. Caractériser géométriquement la transformation f qui, à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z'.

  b) Même exercice :

  $z' = (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3}$ $\quad$ $z' = (1+i)z + i\sqrt{2}$ $\quad$ $z' = (1-i\sqrt{3})z + i$

  $z' = (1+i)z + i - 1$ $\quad$ $z' = (1+i)z - 1 - 5i$ $\quad$ $z' = (1-i)z + 2 - 3i$