Similitudes planes directes

P est un plan affine euclidien orienté, $R=(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$ un repère orthonormal de P.

1. GENERALITES

1.1 Définition

Une similitude est une application de P dans P composée d'une homothétie de rapport positif et d'une isométrie.
Cette composition est commutative.

1.2 Propriétés

- Une similitude conserve le rapport des distances pour tous les bipoints et leurs images.

Soit s une similitude de P, A, B, C, D des points de P et A', B', C', D' leurs images par s.
Soit f une isométrie de P et h une homothétie de rapport k tel que s = h o f.

$$h\circ f : (A,B) \xrightarrow{f} (A_1,B_1) \xrightarrow{h} (A',B')$$

$AB = A_1B_1$ $\quad$ $A'B' = k\, A_1B_1$

et $\quad$ $CD = C_1D_1$ $\quad$ $C'D' = k\, C_1D_1$

alors, on a $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$.

Le rapport $k = \dfrac{A'B'}{AB}$ est appelé *rapport de la similitude*.

- Toute similitude de rapport non nul est une bijection affine.
- La réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport 1/k.
- Si le rapport k = 1, on a une isométrie.
- Pour toute similitude non réduite à une translation ou à un antidéplacement, il existe un point invariant unique. (appelé centre de la similitude)
- La composée de deux similitudes de rapport k_1 et k_2 est une similitude de rapport k_1k_2.

On a $A_1B_1 = k_1\, AB$ et $A'B' = k_2\, A_1B_1$ alors $A'B' = k_1\, k_2\, AB$.

2. SIMILITUDE DIRECTE

2.1 Composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation de même centre

Soit Ω un point du plan orienté.
On note h l'homothétie de centre Ω et de rapport k (k>0) et r la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Etude de r o h et de h o r.
On a r o h(Ω)=Ω et de h o r(Ω)=Ω.
Soit M un point du plan. On pose M' = r o h(M) et M"= h o r(M). Comparons M' et M".

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "roh"'] & M_1 \arrow[d, "r"] \\ & M' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "hor"'] & M_2 \arrow[d, "h"] \\ & M'' \end{tikzcd}$$

Pour M', on a ΩM_1 = k ΩM et $\Omega M_1 = \Omega M'$, et pour M", on a $\Omega M_2 = \Omega M$ et $\Omega M_2 = k\Omega M''$, alors $\Omega M'' = \Omega M'$.

De plus, $(\overrightarrow{\Omega M_1},\overrightarrow{\Omega M'}) = (\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})$, et les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M_1}$ et $\overrightarrow{\Omega M}$ sont colinéaires.

Ensuite, $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M''}) = (\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M_2})$, et les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M_2}$ et $\overrightarrow{\Omega M''}$ sont colinéaires

Alors $\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\overrightarrow{\Omega M''}$ sont colinéaires et de même sens. D'où M' = M", et roh = hor.

Propriété

h est une homothétie de rapport positif et r une rotation de même centre, alors roh = hor

Remarque : Cette propriété n'est vraie que si h et r ont le même centre.

Propriétés de hor :

- roh conserve les angles orientés et multiplie les distances par k.
- Expression complexe de roh :

Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k, et r la rotation de centre Ω et d'angle θ.

On note z et z' les affixes respectives de M et M'=roh(M) et ω celle du centre Ω.

On vérifie que : $z' - z_\Omega = k e^{i\theta}(z - z_\Omega)$

Résumé : h est une homothétie de rapport k positif et r une rotation de même centre

- roh = hor
- Ω est invariant par roh.
- roh conserve les angles orientés et multiplie les distances par k.
- l'écriture complexe de roh est $z' - z_\Omega = k e^{i\theta}(z - z_\Omega)$.

2.2 Similitude directe

a- Définition

On appelle similitude directe toute application de P dans P composée d'une homothétie de rapport positif et d'un déplacement.

Exemples de similitudes directes :

- les rotations et les translations sont des similitudes directes de rapport k = 1.
- une homothétie de rapport k ($k \in IR^*$) est une similitude directe de rapport |k|.

b- Propriétés

- Une similitude directe multiplie les distances par un réel k >0 et conserve l'orientation des angles.

Pour tous points A, B, C et leurs images A', B', C' par une similitude directe : A'B'=kAB, et $(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

- Une similitude directe autre qu'une translation est déterminée par un centre Ω, un rapport k et un angle θ. On la note s(Ω, k, θ).

- Une similitude directe est déterminée lorsqu'on connaît son centre Ω, un point M et son image M'.

s : M → M' = s(M) ΩM' = k ΩM et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$.

- Une similitude directe s(Ω, k, θ) est la composée de l'homothétie h(Ω, k) et de la rotation r(Ω,θ). Ces deux applications sont commutables.
- La composée de deux similitudes directes est une similitude directe
- La réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.
- L'image d'une droite D par une similitude directe et une droite D' telle que l'angle (D,D')=θ.
- L'image d'un triangle ABC par une similitude directe est triangle A'B'C' semblable à ABC.
- L'image d'un cercle de centre I est de rayon R est le cercle de rayon R' = kR et de centre I', tel que Ω I' = k Ω I et (Ω I, Ω I ') = θ.

2.3 Expression analytique d'une similitude directe

Soit la similitude s (Ω, k, θ). Notons (x_0 , y_0) les coordonnées de Ω.
Soit l'homothétie h = h (Ω, k) et la rotation r = r(Ω, θ).
Par l'homothétie h, on associe au point M (x, y) le point M_1 (x_1 , y_1). Et, par la rotation r, on associe au point M_1 (x_1 , y_1) le point M' (x', y'). L'expression analytique de la similitude s=roh est de la forme :

$$\begin{cases} x' = (k\cos\theta)x - (k\sin\theta)y + p \\ y' = (k\sin\theta)x + (k\cos\theta)y + q \end{cases}$$

On peut écrire :

$$\begin{cases} (x'-x_0) = (k\cos\theta)(x-x_0) - (k\sin\theta)(y-y_0) \\ (y'-y_0) = (k\sin\theta)(x-x_0) + (k\cos\theta)(y-y_0) \end{cases}$$

Exemple : expression analytique de la similitude s de centre Ω (1 ; -2), de rapport k = 2 et d'angle θ=π/3.

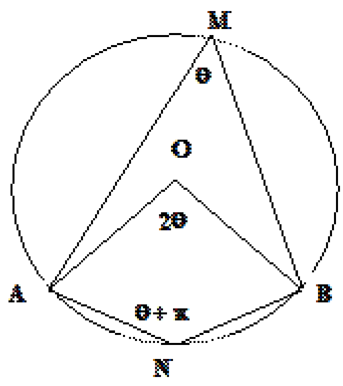
2.4 Problèmes de contruction

2.4.1 Construction du centre d'une similitude directe s déterminée par deux couples de points (A, A') et (B, B').

a) théorème de l'angle inscrit

- A, M, B sont trois points distincts deux à deux d'un cercle de centre O, alors $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (π) i.e. si $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\theta$ alors $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta$ ou $\theta + \pi$
- A et B sont deux points distincts d'un cercle de centre O, alors pour tous point M et N du cercle, distincts de A et de B on a :

- Si M et N sont d'un même côté de (AB), $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB})$.



- Si M et N sont de part et d'autre de (AB), $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB})+\pi$.

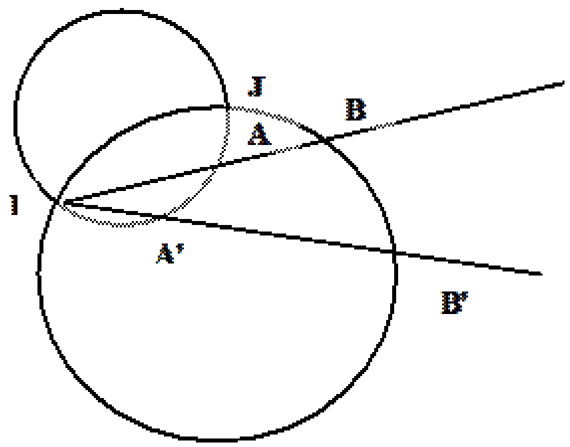
b) - Si (AB) et (A'B') sont parallèles s est soit une translation soit une homothétie.

Supposons que (AB) est non parallèle à. (A'B').

Les droites (AB) et (A'B') sont sécantes. Soit $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'})=\theta$

Le centre Ω de la similitude s est tel que $(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega A'})=\theta$, or $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IA'})=\theta$ alors Ω est un point du cercle (IAA'). De même, Ω est un point du cercle (IBB'). Ces cercles ayant un point commun I, ont un second point commun J.

En général, $\frac{IA'}{IA}\neq\frac{IB'}{IB}$ alors $\Omega\neq I$, d'où $\Omega=J$.



Théorème

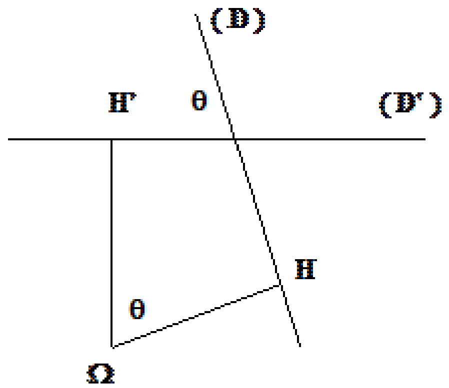
Soit s la similitude transformant (A, B) en (A', B') avec $A\neq B$ et $A'\neq B'$, si les droites (AB) et (A'B') sont sécantes en I, le centre Ω de s est le point, autre que I, commun aux cercles (IAA') et (IBB').

Remarque : Si I et J coïncident, les aux cercles (IAA') et (IBB') sont tangents en I ; le point I est alors le centre de la similitude.

2.4.2 Construction de la droite D', transformée d'une droite D donnée par la similitude s(Ω, k, θ).

- H est le projeté orthogonal de Ω sur D. L'image H' de H par s est telle que $(\overrightarrow{\Omega H},\overrightarrow{\Omega H'}) = \theta$ et ΩH' = k.ΩH. La droite (D) perpendiculaire en H à (ΩH) a pour image par s la droite(D') perpendiculaire en H' à (ΩH') et tel que $(\Omega H',D') = (\Omega H,D)$.

- Inversement, soit deux droites D et D' et un point Ω n'appartenant ni à D ni à D', se projetant en H sur D et en H' sur D', il existe une unique similitude de centre Ω transformant D en D' puisqu'une telle similitude transforme nécessairement H en H'.



3. SIMILITUDE INDIRECTE

3.1 Définition

On appelle similitude indirecte (ou inverse) toute application de P dans P composée d'une homothétie de rapport positif et d'un antidéplacement.

3.2 Propriétés - théorèmes

Théorème

Soit une droite (Δ) et Ω un point de (Δ) , k $\in$IR*. Si h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k alors $s_{\Delta} \circ h = h \circ s_{\Delta}$

Théorème

Toute similitude indirecte du rapport k et de centre Ω se décompose d'une manière unique en composée commutative d'une homothétie de centre Ω et d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ) passant par Ω.

Démonstration :
f une similitude indirecte de rapport k et de centre Ω

$h = h(\Omega, k)$, posons $g = h^{-1} \circ f$, g est la composée d'une similitude directe (h^{-1} de rapport $\frac{1}{k}$) et d'une similitude indirecte (f de rapport k) donc g est une similitude de rapport $\frac{1}{k} \times k = 1$ alors g est un antidéplacement.

$g(\Omega) = h^{-1} \circ f(\Omega) = \Omega$ donc g est une symétrie orthogonale d'axe passant par Ω et par suite on a : $s_{\Delta} = h^{-1} \circ f \Leftrightarrow f = h \circ s_{\Delta}$ et $\Omega \in (\Delta)$.

L'unicité de la décomposition de h
Supposons $f = h' \circ s_{\Delta'}$ avec $h' = h(\Omega, k)$ et (Δ') la droite qui passe par Ω or $f \circ f = h(\Omega, k^2)$ et $f \circ f = h'(\Omega, k^2)$ d'où $h(\Omega, k^2) = h'(\Omega, k^2)$ et par suite $s_{\Delta} = s_{\Delta'}$ donc la décomposition est unique

Remarque : L'écriture de f sous la forme $f = s_{\Delta} \circ h = h \circ s_{\Delta}$ s'appelle la forme réduite de f.

Théorème

L'axe (Δ) de la similitude indirecte du centre Ω et de rapport $k \neq 1$ est l'ensemble des points M d'image M ' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

La composée de 2 similitudes inverses est une similitude directe.

La composée d'une similitude directe et d'une similitude inverse est une similitude inverse.

3.3 Expression analytique d'une similitude indirecte

En composant une isométrie négative est une homothétie, on obtient une expression analytique de la forme :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{s} M'\begin{cases} x' = k\alpha\, x + k\beta\, y + p \\ y' = k\beta\, x - k\alpha\, y + q \end{cases} \qquad \text{avec } \alpha^2 + \beta^2 = 1 \text{ et } k > 0$$