EXERCICE 1 :

Dans le plan affine euclidien soit ABCD un rectangle et DEC un triangle isocèle rectangle en E , E$\notin$[A,B] tels que : AB = 2 ; BC = 1 ; DE = CE.

1°) a) Déterminer le barycentre des points pondérés : (A,1) ; (B,1) ; (C,1) ; (D,1) ; (E,2).

b) Quel est l'ensemble (**E$_a$**) des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MD^2 + 2ME^2 = 8.$$

c) Quel est l'ensemble (**E$_b$**) des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MD^2 + 2ME^2 = 3.$$

2°) Soit $\mathcal{V}$ le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$.

a) $\vec{f}$: $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{V}$

M $\mapsto$ $\vec{f}(M) = 2\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}$.

Montrer que $\vec{f}$ est une fonction qui admet un vecteur constant que l'on précisera.

b) Déterminer et construire l'ensemble E$_2$ des points M de $\mathcal{P}$ tels que :

$$2ME^2 - MD^2 - MC^2 = -2.$$

EXERCICE 2 :

Dans le plan on considère un triangle rectangle ABC d'hypoténuse [BC] de longueur 2a.

Soit $\vec{f}$: $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{V}$

M $\mapsto$ $\vec{f}(M) = 4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC}$ $(m \in IR)$.

1°) Déterminer m pour que $\vec{f}(M)$ soit un vecteur constant $\overrightarrow{V_0}$; et calculer $\overrightarrow{V_0}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.

2°) On prend m = –1. Démontrer que le barycentre G des points (A,4) ; (B,–1) ; (C,–1) est le symétrique du milieu I de [BC] par rapport à A.

EXERCICE 3 :

On donne dans un plan affine euclidien un rectangle ABCD et un triangle rectangle en A et isocèle ADE ; (E $\in$ [AB]) ; d(A ;B) = 2a ; d(B ;C) = a.

1°) Déterminer le barycentre de (A,1) ; (B,1) ; (C, 1) ; (D,1) ; (E,2).

2°) Quel est l'ensemble des points M du plan tels q ue :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + 2ME^2 = ka^2 \;;\; k \in IR.$$ Discuter suivant k.

EXERCICE 4 :

Dans le plan affine euclidien P on donne un triangle ABC rectangle en A avec

AB = AC = a (a $>$0).

1°) a) Déterminer et construire le barycentre G des points (A,4) ; (B,–1) ; (C,–1).

b) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2a^2.$$

2°) a) Soit $\mathscr{V}$ le plan vectoriel associé à $\mathscr{P}$.

$$\vec{f} : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{V}$$

$$M \mapsto \vec{f}(M) = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.$$

Montrer que $\vec{f}$ admet un vecteur constant $\overrightarrow{V_0}$; que l'on précisera.

b) Déterminer et construire l'ensemble E des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -2a^2.$$

EXERCICE 5 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. A ; B ; C trois points de $\mathscr{P}$ tels que :

AB = 4a ; AC = 3a ; BC = 5a ; (a ∊ $\mathbb{R}^*$+).

1°) Déterminer l'ensemble E des points M de $\mathcal{E}$ tels que :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{V}$$; ($\vec{V}$ un vecteur donné).

2°) Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

En déduire l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + MB^2 - 3MC^2 = 5a^2$.

EXERCICE 6 :

Dans le plan $\mathscr{P}$ on considère muni d'un repère $(O; \vec{i} ; \vec{j})$ orthonormé, on considère les points $A\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

1°) Déterminer les coordonnées x et y de D sachant que : $\|\overrightarrow{DA}\| = \|\overrightarrow{DB}\| = \|\overrightarrow{DC}\|$.

2°) Déterminer les réels m et n tels que D soit le barycentre des points pondérés (A, 1) ; (B, m) ; (C, n).

3°) Trouver l'ensemble **E** des points M du plan tels que :

$$4\|\overrightarrow{MA}\|^2 + 3\|\overrightarrow{MB}\|^2 + 5\|\overrightarrow{MC}\|^2 = k \quad (k \in IR).$$

4°) Déterminer k tel que A (0 ; 3) appartiennent à l'ensemble **E** que vous représenterez.

EXERCICE 7 :

On considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A, tel que : AB = AC = 3a ; (a $\in \mathbb{R}^{*+}$).

1°) Déterminer le barycentre G des points pondérés (A,4) ; (B, –3) ; (C,2). Construire G.

2°) Soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(M) = 4MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2.$$

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = -36a^2$.

3°) Représenter cet ensemble.

EXERCICE 8 :

On donne dans le plan un triangle ABC rectangle en A tel que :

AB =8cm et AC = 4cm.

1°) Construire le barycentre G des points (A,3) ; (B, –1) ; (C,2).

2°) Déterminer et construire l'ensemble F des point s M du plan vérifiant :

$$\left\| 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\|.$$

EXERCICE 9 :

Dans le plan $\mathscr{P}$,soit un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que :

AB = AC = a ; (a $\in \mathbb{R}^{*+}$).

Soit m un paramètre réel.

1°) Donnez une condition nécessaire et suffisante s ur m pour que le système de points pondérés {(A, 2) ; (B, –1) ; (C, m)}admette un barycentre G_m.

2°) Construire G_0 puis G_2. Vérifier que : $G_0G_2 = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

3°) Déterminer les ensembles suivants :

a) $\Gamma_1 = \left\{ M \in P \;/\; \left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| \right\}$.

b) $\Gamma_2 = \left\{ M \in P \;/\; \left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = 2\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| \right\}$.

EXERCICE 10:

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : AB = 4 cm ; AC = 6 cm et **I** le milieu de [AB] .

1°) a) Construire le barycentre G des points pondérés (A,5) ; (B, –3) ; (C,2) et le point **I**.

b) Calculer : GA^2 ; GB^2 ; GC^2 .

2°) Déterminer et construire l'ensemble **E_1** des points M du plan vérifiant :

$$\left\| 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = 2\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\|$$

3°) Déterminer et construire l'ensemble **E_2** des points M du plan vérifiant :

$$\left\| 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \right\|.$$

4°) a) Déterminer et construire l'ensemble **E_3** des points M du plan vérifiant :

$$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24.$$

b) Déterminer et construire l'ensemble **E_4** des points M du plan vérifiant :

$$5MA^2 - 3MB^2 - 2MC^2 = -72.$$

EXERCICE 11:

Soient A ; B ; C trois points du plan $\mathscr{P}$ tels que : AB = AC = 5 cm ; BC = 6 cm.

1°) Construire le triangle ABC et calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$.

2°) Soit G le barycentre des points pondérés (A,2) ; (B, 3) ; (C,3). Construire G et calculer GA.

3°) Soit $f : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$

$$M \mapsto f(M) = 2\overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \bullet \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB}$$

a) Exprimer $f(M)$ en fonction de $f(G)$ et MG. ;

b) Calculer $f(A)$ et $f(G)$.

c) Déterminer et construire l'ensemble **E** des points M tels que : $f(M) = f(A)$.

EXERCICE 12:

Soit ABC un triangle de côtés respectifs BC = a ; AC = b et AB = c. On appelle A' ; B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC] ; [AC] et [AB] ; G le centre de gravité.

a) Faire une figure

b) Calculer en fonction de a , b et c les longueurs AA'^2 ; BB'^2 ; CC'^2 (On utilisera le théorème de la médiane sans justification).

c) En déduire que la somme $GA^2 + GB^2 + GC^2$ vaut $\frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

d) Si M est un point du plan, montrer que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3\,MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

e) En déduire l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = b^2 + c^2.$$