Racines n-ièmes d'un nombre complexe - Résolution d'une équation dans C

Exercice 1

Résoudre dans C les équations suivantes

$z^3 = 8i$; $z^3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$; $z^4 = 2(-1 + i\sqrt{3})$; $z^6 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$

Exercice 2

Calculer $\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{3}\right)^4$ puis déterminer toutes les racines quatrièmes de $\frac{73}{16} - i\frac{11}{2}\sqrt{3}$

Exercice 3

1. Déterminer les solutions de l'équation : $z^4 = 8(-1 + i\sqrt{3})$. Les écrire sous forme algébrique.
2. Vérifier que $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ est une racine de quatrième $8(-1 + i\sqrt{3})$.

En déduire la forme algébrique des solutions de l'équation précédente.

Exercice 4

Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation $\frac{z-4}{z} = i$.

Écrire la solution sous forme algébrique.

Exercice 5

Soit (E) l'équation complexe : $\frac{1}{z} - 2\bar{z} + z. - 1 = 0$.

1. Démontrer que z = x + iy avec x et y réels est solution de (E) si et seulement si : $\begin{cases} -x^2 - x - 3y^2 + 1 = 0 \\ (2x-1)y = 0 \end{cases}$
2. En déduire la résolution de l'équation (E) dans C.

Exercice 6

Résoudre dans C : $z^2 + 2i\,\bar{z} - 1 = 0$ où $\bar{z}$ le nombre complexe conjugué de z.

Même question pour :

$z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})\,|z|$

$z + \bar{z} + z.\bar{z} = 0$

Exercice 7

Résoudre dans C l'équation d'inconnue z définie par :

a) $z^2 + (1 + i)z + 2 + 2i = 0$
b) $z^2 - (7 - 2i)z + 5(3 - i) = 0$
c) $z^2 - (2 + 6i)z - 8 + 8i = 0$;
d) $z^2 - 3(2 + i)z + 5i = 0$
e) $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$

cc BY SA

Exercice 8

1. Résoudre dans C l'équation: $z^2+2\sqrt{3}z+4=0$. Écrire les solutions sous forme trigonométrique.
2. Résoudre dans C l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.

Exercice 9

Résoudre dans C les équations suivantes :

a) $z^4-(5-14i)z^2-24-10i=0$

b) $z^4+z^2+1=0$

c) $z^6-(1-i)z^3-i=0$

d) $z^8+z^4+1=0$

e) $z^4-2(1+ia^2)z+1-a=0$, où $a \in IR$

f) $z^5=-1$ et $1+iz-z^2-iz^3+z^4=0$.

g) $z^4+2z^3-z^2+2z+1=0$

h) $z^4+2z^3-5z^2-2z-1=0$

Exercice 10

Résoudre dans C l'équation $z^3-(3+6i)z^2-(9-15i)z+22-6i=0$ sachant qu'elle admet une racine réelle.

Même question pour : $z^3-i\,z+1-i=0$

Exercice 11

Résoudre dans C l'équation $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$ sachant qu'elle admet une racine imaginaire pur.

Même question pour : $z^3+(3-2i)z^2-(1+6i)z+2i=0$

Exercice 12

On pose $P(z)=z^3-3(1+i)z^2+(3+10i)z+3(1-3i)=0$.

Calculer P (1 - i). Que peut-on en conclure ?

Résoudre dans C l'équation P(z) = 0.

Exercice 13

On pose $P(z)=z^4-6z^3+23z^2-34z+26$.

1. α désigne un complexe quelconque. Montrer que $P(\overline{\alpha})=\overline{P(\alpha)}$.

En déduire que si P(α) = 0 alors $P(\overline{\alpha})=0$

2. Calculer P (1+i), en déduire les solutions de l'équation P(z) = 0.

Exercice 14

Soit $P(z)=z^3-4z+\lambda$, où λ est un nombre réel.

a) Montrer que si l'équation P(z) = 0 admet une solution complexe z_0, alors $\overline{z}_0$ est aussi solution.

b) En déduire que l'équation P(z) = 0 admet au moins une solution réelle, sans chercher à résoudre l'équation.
c) Déterminer λ pour que l'équation P(z) = 0 admette une racine réelle de module 2, et résoudre l'équation pour la valeur de λ ainsi trouvée.
d) Déterminer λ pour que l'équation P(z) = 0 admette une racine complexe de module 2, et résoudre l'équation pour la valeur de λ ainsi trouvée.