

Suites numériques réelles

1. Suites arithmétiques

1.1 Définitions

Une suite (u_n) est une suite arithmétique, si quel que soit n , $u_{n+1} - u_n$ est une constante r .

On a donc pour tout n , $u_{n+1} - u_n = r$ ou $u_{n+1} = u_n + r$

Le réel r est appelé raison de (u_n)

1.2 Expression de u_n en fonction de n

Si u_0 est le 1^{er} terme d'une suite arithmétique (u_n) et r sa raison, alors :

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r$$

$$u_3 = u_2 + r$$

...

$$u_n = u_{n-1} + r$$

En additionnant membre à membre ces n égalités, on a $u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + nr$

Ce qui donne $u_n = u_0 + nr$ **(1)**

Donc si $p \in \mathbb{N}$ $u_p = u_0 + pr$ **(2)**

(1) - (2) donne $u_n - u_p = (n-p)r$

ou $u_n = u_p + (n-p)r$

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , alors

$$u_n = u_0 + nr$$

et quel que soit p , $u_n = u_p + (n-p)r$

1.3 Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

- Considérons d'abord la somme $s_n = 1 + 2 + \dots + n$

$$s_n = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$$

$$s_n = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$$

Par addition membre à membre ,

$$2s_n = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) = n(n+1)$$

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Soit (u_n) une suite arithmétique de 1^{er} terme u_0 e de raison r .

Posons $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

On a :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$= u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + \dots + u_0 + nr$$

$$= (n+1)u_0 + r(1+2+\dots+n)$$

donc
$$S_n = (n+1)u_0 + r \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2u_0 + nr)(n+1)}{2} = \frac{(u_0 + u_0 + nr)(n+1)}{2}$$

Ainsi
$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

où u_0 : le 1^{er} terme de la somme, u_n : le dernier terme de la somme et $(n+1)$ le nombre de termes..

Plus généralement,
$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$$
 pour tous entiers n et p tels que $p \leq n$

On a, par exemple,
$$u_3 + u_4 + \dots + u_{25} = 23 \frac{u_3 + u_{25}}{2}$$

1.4 Limite d'une suite arithmétique

Soit $u_n = u_0 + nr$

- Si $r < 0$ $\lim(u_n) = -\infty$
- Si $r > 0$ $\lim(u_n) = +\infty$
- Si $r = 0$, $\lim(u_n) = u_0$

2. Suites géométriques :

2.1 Définitions

(u_n) est une suite géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que, quel que soit n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

Le réel q est appelé raison de la suite géométrique (u_n) et on a $u_{n+1} = q \cdot u_n$

2.1.1 Expression de un en fonction de n

Si (u_n) est une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q , on a :

$$u_1 = qu_0, u_2 = qu_1, u_3 = qu_2, \dots, \text{ et } u_n = qu_{n-1}$$

On a alors
$$u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \dots u_n = q^n \cdot u_0 u_1 u_2 \dots u_{n-1}$$

Et après simplification :
$$u_n = q^n u_0 \quad (1)$$

Et si $k \in \mathbb{N}$,
$$u_k = q^k u_0 \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \text{ donne } \frac{u_n}{u_k} = \frac{q^n}{q^k} = q^{n-k}$$

d'où, quels que soient n et k
$$u_n = q^{n-k} u_k$$

Donc, si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 , alors

$$u_n = q^n u_0 \text{ et pour tout entier } k, u_n = q^{n-k} u_k.$$

2.2 Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de 1^{er} terme u_0

$$\text{Soit } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad (1)$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par q , on a :

$$qS_n = qu_0 + qu_1 + \dots + qu_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n+1} \quad (2)$$

Par soustraction membre à membre de (1) et (2), $S_n - qS_n = u_0 - u_{n+1} = u_0 - q^{n+1}u_0$

Ce qui donne,

Pour $q \neq 1$, $S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ où u_0 est 1^{er} terme de la somme et $n+1$ le nombre de termes de la somme.

Et plus généralement $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$ pour tous entiers n et p tels que $p \leq n$

2.3 Limite d'une suite géométrique

Théorème :

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = q^n$

- si $q > 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$
- si $q = 1$, (u_n) est stationnaire et converge vers 1
- si $0 < |q| < 1$, $\lim(u_n) = 0$
- si $q \leq -1$, (u_n) n'a pas de limite

Remarque :

Considérons la suite (S_n) définie par $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ où (u_n) est une suite géométrique de raison q et de 1^{er} terme u_0 .

On sait que si $q \neq 1$, $S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

On a : si $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$ donc, (S_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n) = \frac{u_0}{1 - q}$