Séquence 1 : Dérivation

1. Nombre dérivé – Fonction dérivée

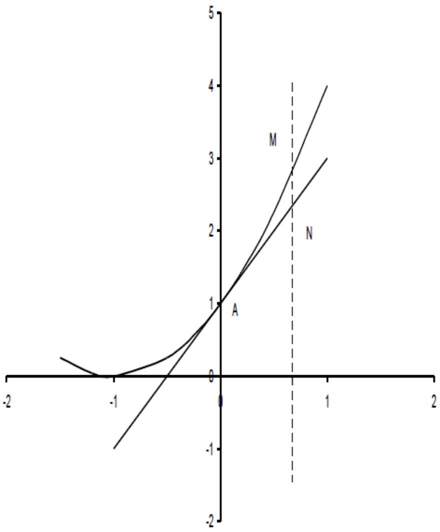
1.1 Exemple

- En classe de seconde, nous avons vu que la fonction affine $x \to 1+2x$ est une approximation locale de la fonction $x \to (1+x)^2$ au voisinage de 0. Donc $(1+x)^2 \approx 1+2x$ pour | x | petit.

Ainsi, on a : $(1{,}02)^2 \approx 1{,}04$ pour x = 0,02

$(0{,}98)^2 \approx 0{,}96$ pour x = - 0,02

- Considérons la courbe C de la fonction $f : x \to (1+x)^2$ et la droite D : y=2x+1.



Le point A(0 ; 1) appartient à D et à C.

Soit M le point de C d'abscisse x (x ≠ 0) et N le point de D de même abscisse. On a $y_M = (1+x)^2$ et $y_N = 2x+1$. Pour x petit, on a donc $y_M \approx y_N$.

La droite D passe par A(0 ; 1) et a pour coefficient directeur 2.

La pente de la droite AM est $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{(1+x)^2-1}{x} = x+2$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2$.

Donc, le coefficient directeur de D est la limite du coefficient directeur de AM lorsque x tend vers x_A. Cette limite est appelée *nombre dérivé* de la fonction f au point d'abscisse 0.

1.2 Définitions

f est une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

- f est dite **dérivable** au point x_0 si $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0.
  Cette limite, si elle existe, s'appelle le **nombre dérivé de f** en x_0 et on la note $f'(x_0)$.
- f est **dérivable sur I** si elle est dérivable en tout réel x de I.
- La **fonction dérivée de f**, notée f ', est la fonction définie sur I qui à tout réel x de I, associe le nombre dérivé de f en x.

Exemple : Calculer la dérivée de $f : x \to x^2$

Si f' est dérivable sur I, sa dérivée est appelée **dérivée seconde de f** et est notée f''.

1.3 Dérivées des fonctions usuelles

f(x)	f'x)	f(x)	f'x)
$a,\ a\in\mathbb{R}$	0	$\frac{1}{x},\ x\neq 0$	$-\frac{1}{x^2}$
x	1	$\frac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
ax	a	$\sqrt{x},\ x\geq 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	x^{n-1}		

1.4 Résumé des règles relatives aux calculs des dérivées

1.4.1 Dérivée d'une fonction composée

u est une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J tel que u(I)⊂J.

Soit f la fonction définie sur I par f = v o u. Si u est dérivable en x_0 et si v est dérivable en $u(x_0)$, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = v'[u(x_0)].u'(x_0)$.

1.4.2 Règles de calculs

- u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle.

f(x)	f'x)	f(x)	f'x)
$u+v$	$u'+v'$	$u^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nu^{n-1}
uv	$u'v+uv'$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2}$
$\lambda u,\ \lambda\in\mathbb{R}$	$\lambda u'$	$\frac{1}{u^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\sqrt{u},\ x\geq 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

- Les polynômes sont dérivables sur IR.
- Les fonctions rationnelles (quotient de deux polynômes) sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Remarque : Dans les problèmes étudiés en terminale, nous devons surtout déterminer le signe de la dérivée, d'où l'intérêt, lorsque cela est possible, de présenter cette dérivée sous forme d'un produit dont on sait déterminer le signe de chaque facteur ou d'un quotient dont on sait déterminer le signe des numérateur et dénominateur.

2. Applications de la dérivée

2.1 Tangente

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $x_0 \in$ I. Supposons que f est dérivable en x_0.

On note C la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

La **tangente** à C au point A(x_0 ; f(x_0)) est la droite qui passe par A et qui a pour coefficient directeur f'(x_0). Une équation de cette tangente est $y=(x-x_0)f'(x_0)+f(x_0)$.

- Si f'(x_0) = 0, la tangente à C au point x_0 est parallèle à l'axe des abscisses (on dit que cette tangente est **horizontale**)
- Si $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \infty$, la tangente en A est dite **verticale**.

2.2 Étude du sens de variation

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.
- Si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.
- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
- f est dite **monotone** sur I si elle est croissante ou décroissante.

L'étude du sens de variation d'une fonction consiste à partager, quand c'est possible, le domaine de définition de la fonction en intervalles où elle est monotone.

2.3 Extremum de f et zéros de f'

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

Si f admet un maximum ou un minimum en un réel x_0 de I, alors f'(x_0)=0.

Remarque : la réciproque est fausse. Considérer la fonction f : $x \to x^3$.

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 in I.

Si f'(x) s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum en x_0.

2.4 Résolution d'équations

Une fonction f définie et continue sur un intervalle I est une **bijection** de I sur l'intervalle J si :

- pour tout x de I, f(x) est dans J ;
- pour tout m de J, l'équation f(x) = m d'inconnue x admet une unique solution dans I.

- Si pour tout x de]a ; b[, f'(x)>0 alors f est une bijection de [a ; b] sur [f(a) ; f(b)].
- Pour tout réel m de [f(a) ; f(b)], l'équation f(x) = m admet une solution unique dans [a ; b].
- Cas particulier : si f(a) et f(b) sont de signes contraires l'équation f(x)=0 admet une solution unique dans [a ; b].