En savoir plus sur les systèmes linéaires en T L

1. Système de Cramer

1.1 Présentation

C'est le mathématicien suisse Gabriel Cramer (1704-1752) qui a introduit l'expression générale de la solution d'un système linéaire de n équations à n inconnues. Voici sa méthode dans le cas n = 2 .

Soit à résoudre le système

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

On va d'abord éliminer y en multipliant (1) par b' et (2) par - b :

b' x(1) : ab' x +b b' y = c b' (1')

-b x(2) : a' (-b) x – b' b y = - c b (2')

(1') + (2') : (ab' x - a 'b)x = c b' - c' b .On peut en déduire l'expression de x, à condition que ab' - a' b ≠ 0 . Alors :

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}$$

Par une méthode analogue, on va éliminer x en multipliant (1) par - a' et (2) par a :

-a' •(1) : -a a' x - a' b y = - a' c (1'')

a• (2) : a a' x + ab' y = a c' (2'')

(1'') + (2'') : (a b' - a' b) y = a' c - a c' , si ab' - a' b ≠ 0 , on a :

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

Le système admet donc une solution unique à condition que l'expression Δ = a b' - a' b soit non nulle. Δ est appelé déterminant du système

$$\Delta = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

0n peut remarquer que les numérateurs de x et de y peuvent aussi être écrits sous forme d'un déterminant. En effet :

$$\Delta_x = cb' - c'b = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_y = ac' - a'c = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

1.2 Méthode

Soit à résoudre le système

$$\begin{cases} ax+by=c & (1) \\ a'x+b'y=c' & (2) \end{cases}$$

Soit (d) : a x + b y =c et (d') : a' x + b' y = c'

Pour résoudre ce système linéaire par la méthode du Déterminant, on calcule :

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b \quad ; \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} c & a' \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-c'b \quad ; \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c$$

Les différents cas sont résumés dans le tableau suivant :

$\Delta = 0$	$\Delta_x = \Delta_y = 0$ une infinité de solution	Les deux droites sont confondues
	$\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$ Le système est impossible	Les deux droites sont strictement parallèles
$\Delta \neq 0$	$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$ S = $\{(\frac{\Delta_x}{\Delta};\frac{\Delta_y}{\Delta})\}$	Les deux droites sont sécantes

1.3 Exemple

Soit le système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} 3x-4y=2 \\ -\frac{3}{2}x+2y=-1 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est nul car Δ = 3x2 - (-4)($\frac{-3}{2}$ = 0.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2x2-(-1)(-4)=0 \quad \text{et} \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ \frac{-3}{2} & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) -2(\frac{-3}{2} = 0.$$

$\Delta_x = \Delta_y = 0$, on a une infinité de solution. Les deux droites sont confondues. En effet si on multiplie la deuxième équation par 2, on obtient la première équation.

2. Exemple de programmation linéaire

2.1 Intérieur d'un triangle

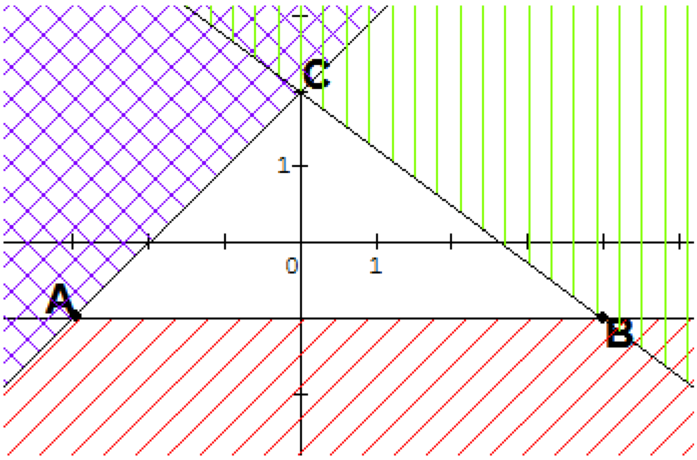
le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ .On donne les points A(-3 ; -1), B(4 ; -1), C(0 ; 2).

Caractériser par un système d'inéquations, l'intérieur du triangle ABC

La droite (AB) a pour équation : y = -1

La droite (BC) a pour équation :3x +'y -8 = 0

La droite (AC) a pour équation : x- y +2 = 0



L'intérieur du triangle ABC peut être caractérisé par le système :

$$\begin{cases} \mathbf{y > -1} \\ \mathbf{x - y + 2 > 0} \\ \mathbf{3x + 4y - 8 < 0} \end{cases}$$

2.2 Problème de programmation linéaire

Un pépiniériste veut obtenir une variété de plante vigoureuse et florissante par l'utilisation effective de deux sortes d'engrais.

L'engrais A donne à la plante une croissance de 15 cm pour chaque sachet entier de 4g utilisés.

L'engrais B donne à la plante des qualités florissantes et la fait aussi grandir de 3cm pour chaque sachet entier de 80g utilisé.

Pour être équilibrées, les plantes adultes ne doivent pas dépasser la taille de 90cm et la dose totale d'engrais ne doit pas atteindre 80g. Quel est dans ces conditions, le dosage d'engrais qui permet d'obtenir, parmi les florissantes, la plus grand plante ? Quels sont les nombres de sachet A et B ?

On désigne par x et y les nombres de sachets A et B utilisés.

En fonction de du nombre de sachets utilisés , on peut exprimer :

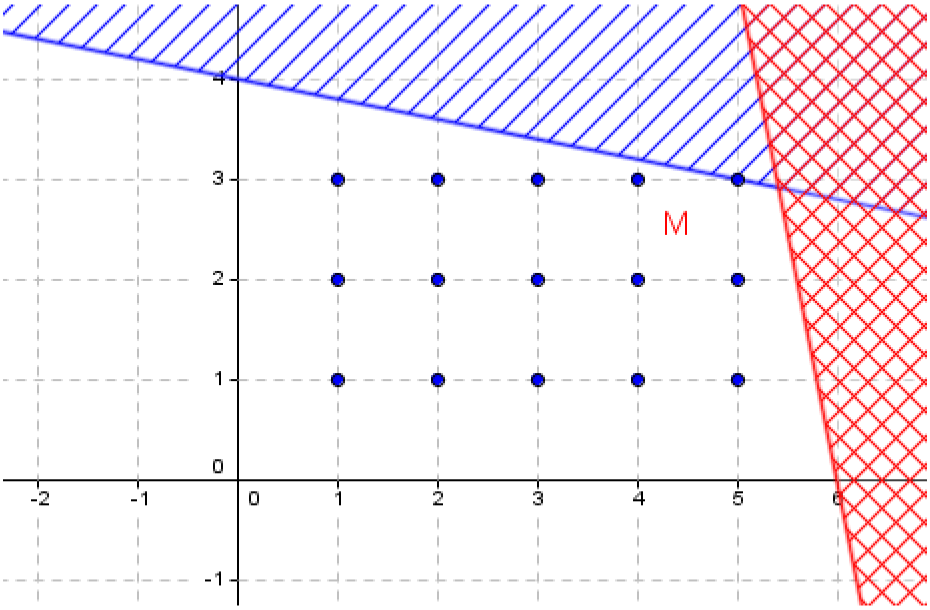
la taille d'une plante par 15x +3y

le poid total d'engrais par 4x + 20y

x et y doivent satisfaire la double condition :

$$\begin{cases} 15x + 3y < 90 \\ 4x + 20y < 80 \end{cases}$$

Résolvons ce système avec Géogebra



On a le choix entre plusieurs combinaisons . Celle qui correspond aux conditions de l'énoncé est représentée sur la figure par le point M(4; 3).

3. Résolution d'un système à trois inconnus par substitution

On peut utiliser la méthode par substitution pour résoudre un système linaire è trois inconnues. Voici un exemple :

résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x - 2y = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

la deuxième équation donne y = x – 1. Si on porte cette valeur dans l'équation (1) et (3) , on le systèmes

$$\begin{cases} x + 3(x-1) + 2z = 1 \\ x + (x-1) + z = 2 \end{cases} <=> \begin{cases} 2(2x+z) = 4 \\ 2x + z = 3 \end{cases} <=> \begin{cases} 2x + z = 2 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution