ÉQUATIONS - INÉQUATIONS

1. Équations du second degré dans IR

1.1 Rappels

1.1.1 Trinômes

Un trinôme du second degré est une expression de la forme a x² + b x + c où a,b et c sont des réels et a≠0 . Soit f (x) = a x² + b x + c , on dit que α est une racine de f (x) si f (α) = 0 .

Exemples

- $T_1(x) = 3x^2 - x + 1$ est un trinôme. Ici a =3, b = -1 , c = 1
- $T_2(x) = - x^2 - 2x +3$ en est un autre avec a = -1, b =-2, c = 3

1.1.2 Équations du second degré dans IR

Une équation du second degré est une équation qui peut se ramener à la forme ax² +bx + c = 0, a ≠ 0 après transformation. Le réel Δ = b² - 4 a c est appelé discriminant de l'équation.

Exemples

- 4x² - x - 3 = 0 est une équation du second degré ,avec a = 4, b = -1, c = - 3.
- 5x²- 4x – 1 = 0 en est une , ici a = 5 , b = -4, c = -1.

1.2 Résolution

Pour résoudre a x² + b x + c = 0, on calcule Δ = b² - 4 a c. Les différents cas sont résumés dans e tableau ci-dessous :

$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
L'équation est impossible. On écrit: S = ø	Il y a une racine double : $x'=x''=-\frac{b}{2a}$ S = { x'}	Il y a deux racines distinctes : $x'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ S={x' ; x''}

Exemples

Résoudre dans IR les équations suivantes :

- 2x² – x + 2 = 0
- 4x² + 4x +1 = 0
- x² – x – 6 = 0

Réponse

- 2x² – x + 2 = 0

Ici a = 2, b = -1, c = -2 . Δ = b² – 4 a c =(-1)² – 4.1.2.

Δ = - 7. l'équation est impossible , S = ø

- $4x^2 + 4x + 1 = 0$

Ici a = 4, b = 4, c = 1 . $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4.4.1$.

$\Delta = 0$ et on a x' = x'' = $x' = x'' = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2.4}$. l'équation a une solution, S = { $S = \{\frac{-1}{2}\}$

- $x^2 - x - 6 = 0$

Ici a = 1, b = - 1, c = - 6 . $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-6).1 = 25$.

On a deux racines $x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. $x' = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2.1}$ et $x'' = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2.1}$.

x' = - 3 et x'' = 2 . S = {-3 ; 2}.

2. Inéquations du second degré dans IR

2.1 Les trois formes d'un trinôme

Un trinôme du second degré peut s'écrire sous les différentes formes suivantes.

Forme développée	Forme canonique	Forme factorisée
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$	$f(x) = a(x - x')(x - x'')$ où $x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ Seulement dans le cas où $\Delta \geq 0$

2.2 Signe d'un trinôme

Pour dresser le tableau de signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$, on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$

<table>
<tr><th>$\Delta < 0$</th><th>$\Delta = 0$</th><th>$\Delta > 0$</th></tr>
<tr>
<td>$f(x) = ax^2 + bx + c$
est du même signe que a</td>
<td>f(x) =a x² + b x + c = a($a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
le tableau de signe est de la forme
<table>
<tr><td>x</td><td></td><td>$-\frac{b}{2a}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe de a</td></tr>
</table>
</td>
<td>$f(x) = a(x - x')(x - x'')$
le tableau de signe est de la forme
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x'</td><td></td><td>x''</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>x-x'</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td><td>+</td></tr>
<tr><td>x-x''</td><td>-</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>(x-x')(x-x'')</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>signe de –a</td><td>0</td><td>signe de a</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

2.3 Inéquation du second degré dans IR

2.3.1 Forme générale

Une inéquation degré dans IR prend l'une des formes suivantes après transformation d'écriture :

a x² + b x + c ≤ 0 , ou bien a x² + b x + c < 0, ou bien a x² + b x + c > 0, ou bien a x² + b x + c ≥ 0.

2.3.2 Résolution

Pour résoudre une telle inéquation, on dresse le tableau de signe de f(x) = a x² + b x +c, on hachure les colonnes avec les signes inutiles. 0n écrit la solution sous forme de réunion d'intervalles

2.3.3 Exemples

Résoudre dans IR les inéquations suivantes:

(1) $x^2 - x + 3 < 0$

(2) $-2x^2 + 9x - 4 > 0$

(3) $4x^2 + 28x + 49 < 0$

Solutions

<table>
<tr><th>$x^2 - x + 3 < 0$</th><th>$-2x^2 + 9x - 4 > 0$</th><th>$4x^2 + 28x + 49 < 0$</th></tr>
<tr>
<td>Posons f(x) = x^2-x+3.
a =1, b = -1, c = 3
$\Delta = b^2-4ac$ = -11
donc ,$x^2 - x + 3 > 0$,
car a = 1

| x | $-\infty$ $+\infty$ |
| f(x) | + |

S = $\emptyset$</td>
<td>a =-2, b = 9, c = - 4
$\Delta = b^2-4ac$ = 49
x' = $\frac{1}{2}$, x'' = 4

| x | $-\infty$ $\frac{1}{2}$ 4 $+\infty$ |
| f(x) | +   0   -   0   + |

S =] $\frac{1}{2}$; 4 [</td>
<td>a = 4, b = 28, c = 49 $\Delta = b^2-4ac$ = 0
x' =x'' = $x'=x''=\frac{-7}{2}$

| x | $-\infty$ $\frac{-7}{2}$ $+\infty$ |
| f(x) | +   0   + |

S = $\emptyset$</td>
</tr>
</table>