Equations différentielles

1. Qu’est-ce qu'une équation différentielle ?

1.1 Position du problème

L'étude de phénomènes évolutifs (en cinématique, électricité, économie, etc.) conduit souvent à des relations liant une fonction et une ou plusieurs de ses dérivées.

Dans "équation différentielle", on trouve les termes :
- "équation", il s'agira donc de déterminer une inconnue (ici l'inconnue est une fonction) à partir d'une égalité,
- et "différentielle" indiquant qu'interviennent une ou plusieurs fonctions dérivées.

Par exemple : $x^2 f\,'(x) + [\,f(x)\,]^2 = 1$ est une équation différentielle.

Par commodité, on remplace f(x) par y dans l'écriture d'une équation différentielle ; ainsi l'équation donnée ci-dessus devient: $x^2 y\,' + y^2 = 1$.

Dans ce cours, on se bornera, à des cas où I= IR et à deux types bien précis d'équations :
- les équations différentielles linéaires, du premier ordre, à coefficients constants, sans second membre.
C'est-à-dire celles du type $y' - ay = 0$, où a est un réel donné.
Seule la dérivée première de y apparaît (premier ordre), les coefficients de y et de y' sont constants (-a et 1), l'expression est une combinaison linéaire de y et y', et le second membre de l'égalité est nul ;
- les équations différentielles linéaires du second ordre, à coefficients constants, sans second membre. C'est-à-dire celles du type $y'' + ay' + by = 0$ où a et b sont deux réels donnés.
Le terme «second ordre» provient de la présence de la dérivée seconde de y.

1.2 Nous savons déjà résoudre certaines équations différentielles

- Dire "une fonction dérivable sur I est constante sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée est nulle sur I ", c'est résoudre une équation différentielle.
En effet le problème peut se traduire par : résoudre l'équation $y' = 0$, (dont les solutions sont les fonctions constantes), sur tout intervalle de IR.

- Trouver l'ensemble des primitives d'une fonction donnée g, sur un intervalle I, c'est résoudre une équation différentielle. En effet le problème peut se traduire par : résoudre l'équation $y' = g(x)$.

1.3 Définitions

- Si une fonction f et ses dérivées successives vérifient une équation différentielle, f est dite une solution (ou une intégrale) de l'équation différentielle.

- Le graphe de f s'appelle une courbe intégrale de l'équation différentielle.

- Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions qui vérifient cette équation.

- Lorsque toutes les solutions d'une équation différentielle ont la même forme, et que l'on peut donner cette forme générale des solutions, on dit que l'on écrit la solution générale de l'équation.

2. L'équation du premier ordre ay' + by = 0

L'équation ay' + by=0 est dite à coefficients constants car a et b sont des réels donnés. On supposera $a \neq 0$.

En posant $y' = \frac{dy}{dx}$, on peut écrire l'équation sous la forme $a\frac{dy}{dx} + b\,y = 0$

2.1 Linéarité

L'équation ay' + by = 0 possède la propriété suivante, et à cause de cette propriété on dit qu'elle est linéaire :
si y_1 et y_2 sont deux fonctions solutions de l'équation, alors, pour tous nombres A et B, la fonction $Ay_1 + By_2$ est une solution.

En effet, supposons que y_1 et y_2 soient deux solutions, alors :
$ay_1' + by_1 = 0$, donc $Aay_1' + Aby_1 = 0$ [1]
$ay_2' + by_2 = 0$, donc $Bay_2' + Bby_2 = 0$. [2]

D'où par addition membre à membre des égalités [1] et [2] :
$a\,(Ay_1' + By_2') + b\,(Ay_1 + By_2) = 0$,
ce qui s'écrit encore : $a\,(Ay_1+By_2)' + b\,(Ay_1+By_2)=0$,
et cette égalité prouve que $Ay_1 + By_2$ est solution de ay' + by = 0.

2.2 Résolution

L'équation ay' + by = 0 s'écrit sous la forme $a\frac{dy}{dx} + b\,y = 0$ ou encore $\frac{dy}{y} = -\frac{b}{a}dx$.

Par primitivation, on a $\ln y = -\frac{b}{a}x + C$, où C est une constante réelle.

D'où $y = k\,e^{-\frac{b}{a}x}$ avec k réel quelconque.

Théorème

Les solutions définies sur IR de l'équation différentielle ay' + by =0 sont les fonctions définies par $x \mapsto y = k\,e^{-\frac{b}{a}x}$ avec k réel quelconque.

2.3 Résolution de ay'+by = 0, avec condition initiale $y(x_0)=y_0$

D'après le théorème précédent, l'équation ay' + by = 0 a une infinité de solutions. Mais il n'existe qu'une solution qui prenne une valeur donnée en un point donné.
En effet, cherchons les solutions g telles que $g\,(x_0) = y_0$, où x_0 et y_0 sont deux réels donnés (cette condition imposée est appelée condition initiale).
D'après le théorème précédent, une telle solution g est nécessairement définie par $g(x) = k\,e^{-\frac{b}{a}x}$,

la condition $g(x_0) = y_0$ impose de prendre k tel que $y_0 = k e^{-\frac{b}{a}x_0}$, c'est-à-dire $k = y_0 e^{\frac{b}{a}x_0}$
Il n'y a donc qu'un seul choix possible pour k, d'où une seule solution g telle que $g(x_0) = y_0$.

Théorème

Pour tout couple de réels (x_0, y_0), l'équation ay' + by=0, admet une et une seule solution telle que $g(x_0) = y_0$.

Exemple : Résoudre l'équation différentielle : 3 y' = - 2y, et trouver la solution y telle que y (1) =3.
L'équation s'écrit sous la forme : 3 y' + 2 y = 0. Ici, a = 3 et b = 2

Les solutions sont les fonctions définies sur IR par $y = k e^{-\frac{2}{3}x}$: où k est un réel quelconque.
Le deuxième théorème assure l'unicité d'une telle solution.

Dire que y (1) = 3 équivaut à dire que $3 = k e^{-\frac{2}{3}}$

La solution cherchée est la fonction f définie sur IR par : $f(x) = 3 e^{\frac{2}{3}(1\text{-}x)}$.

3. L'équation du second ordre ay"+ by' + cy = 0

L'équation ay" + by' + cy = 0 est dite à coefficients constants car a, b et c sont des réels donnés. On supposera $a \neq 0$ (sinon, l'équation est du premier ordre).

3.1 Linéarité

L'équation ay" + by' + cy = 0 possède la propriété suivante :
Si y_1 et y_2 sont deux fonctions solutions de l'équation ay" + by' + cy = 0, alors, pour tous nombres A et B, la fonction $Ay_1 + By_2$ est aussi une solution.

La démonstration de cette propriété est analogue à la démonstration donnée au paragraphe 2.1. dans le cas de l'équation du premier ordre. A cause de cette propriété, on dit que l'équation ay" + by' + cy = 0 est linéaire.

3.2 Résolution

Par analogie avec une équation du premier ordre, on cherche une solution de la forme $y(x) = e^{r\,x}$ où r est un complexe.

La fonction g est deux fois dérivables sur IR, et, pour tout réel x : $y'(x) = re^{rx}$, $y''(x)=r^2e^{rx}$.

Donc, dire que y est solution équivaut à dire que, pour tout réel x : $ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$, soit encore, puisque e^{rx} n'est jamais nul, à : $ar^2 + br + c = 0$.

La résolution de l'équation $ar^2 + br + c = 0$ permet donc de trouver des solutions (a priori à valeurs complexes).
De plus, lorsque l'on connaît deux solutions y_I et y_2 de l'équation ay" + by' + cy = 0, on en connaît une famille car toutes les fonctions $Ay_I + By_2$, avec A et B complexes, sont aussi solutions.

Premier cas : l'équation $ar^2 + br + c = 0$ a deux racines, r_1 et r_2, réelles et distinctes.

D'après ce qui précède, les fonctions y_1 et y_2, définies sur IR par : $y_1(x) = e^{r_1 x}$, $y_2(x) = e^{r_2 x}$ sont des solutions (à valeurs réelles dans ce cas).
Nous admettrons que toute autre solution réelle s'écrit : $Ay_1 + By_2$, avec A et B réels.

Deuxième cas : l'équation $ar^2 + br + c = 0$ a deux racines complexes.
Ces deux racines sont des complexes conjugués. Notons-les r et $\overline{r}$. Alors les fonctions g_1 et g_2 définies sur IR par : $g_1(x) = e^{rx}$, $g_2(x) = e^{\overline{r}x}$ sont des solutions à valeurs complexes.

Mais en notant $r = \alpha + i\omega$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ réels, on a, pour tout réel x :

$g_1(x) = e^{\alpha x}e^{i\omega x} = e^{\alpha x}(\cos\omega x + i\sin\omega x)$; $g_2(x) = e^{\alpha x}e^{-i\omega x} = e^{\alpha x}(\cos\omega x - i\sin\omega x)$

Or, $y_1 = \dfrac{g_1 + g_2}{2}$ et $y_2 = \dfrac{g_1 - g_2}{2i}$ sont aussi des solutions et elles sont à valeurs réelles ($y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\omega x$; $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\omega x$)
Nous admettrons que toute autre solution réelle s'écrit : $Ay_1 + By_2$, avec A et B réels.

Troisième cas : l'équation $ar^2 + .br + c = 0$ a une racine double $-\dfrac{b}{2a}$.

On note r cette racine réelle, alors la fonction y_1 définie sur IR par $y_1(x) = e^{rx}$ est une solution.

Nous admettrons, que la fonction y_2, définie sur IR par $y_2(x) = xe^{rx}$, est aussi solution et que toute autre solution réelle s'écrit $Ay_1 + By_2$, avec A et B réels.
Donc, pour tout réel x, la solution générale est de la forme $e^{rx}(A + Bx)$.

L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$

Théorème

Soit l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$
- Si $\Delta > 0$, $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines réelles r_1 et r_2.

La solution de l'équation différentielle est $f(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ avec A et B réels.

- Si $\Delta < 0$, $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines complexes r et $\overline{r}$, $r = \alpha + i\omega$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

La solution de l'équation différentielle est $f(x) = e^{\alpha x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$ avec A et B réels.
- Si $\Delta = 0$, $ar^2 + br + c = 0$ admet une racine r

La solution de l'équation différentielle est $f(x) = e^{rx}(A + Bx)$ avec A et B réels.

3.3 Exemples

Résoudre les équations différentielles suivantes :
$2y'' - 6y' - 8y = 0$
$y'' + 4y' + 4y = 0$
$y'' - 4y' + 5y = 0$

3.4 Résolution de ay" + by' + cy = 0, avec les conditions initiales y (x_0) =y_0 et y' (x_0) = z_0

Théorème

Pour tous x_0 ; y_0; z_0 réels, l'équation différentielle ay" + by' + cy = 0 admet une solution g et une seule, définie sur IR et telle que g (x_0) = y_0, g' (x_0) = z_0.

Exemple : Les solutions de l'équation différentielle y"- 4y' +5 y =0 sont les fonctions g définies par : g (x) = e^{2x} (A cos x + B sin x).

Cherchons parmi ces solutions celles qui répondent aux conditions imposées : g(0)=0, g' (0)=1. (ces conditions imposées sont appelées conditions initiales).

Nous obtenons : g' (x) =2 g (x) + e^{2x} (- A sin x + B cos x).
Or, g(0) =0 équivaut à e^0 (A cos 0 + B sin 0) = 0, donc à A = O.
g' (0) = 1 équivaut à 2 g(0) + e^0 (- A sin 0 + B cos 0) = 0, donc à B = 1.
Il n'y a donc qu'une solution g telle que g (0) =0, g' (0) = 1, c'est la fonction définie par g (x) = e^{2x} sin x.

4. Exemples de résolution d'équations différentielles avec second membre

Les équations y' - ay = f ou y" + ay' + by = f, où f est une fonction non nulle donnée, sont dites équations avec second membre, pour les distinguer des équations y' - ay = 0, y" + ay' + by = 0, qui sont alors qualifiées d'homogènes.

4.1 Equation du premier ordre : y' - ay = f

On considère l'équation différentielle : (E) y' + y = x^2+x.
1. Trouver une fonction polynôme du second degré, h, qui soit solution de (E).
2. On note g une solution de (E).
a. Montrer que g - h = g_1 est une solution de l'équation : (E_1) y'+y = 0.
b. Réciproquement, montrer que si g_1 est une solution de (E_1), alors g = g_1 + h est une solution de (E).
3. Résoudre l'équation (E}).
4. Préciser l'ensemble des solutions de l'équation (E).

4.2 Equation du second ordre : y" + ay' + by = f

On considère l'équation différentielle : (E) y"+2y' +y = cos x.
1. Trouver deux réels A et B tels que la fonction h, h (x) = A cos x + B sin x, soit une solution de (E).
2. Notons g une solution de E.
a. Montrer que g - h = g_1 est une solution de l'équation : (E_1) y''+2y' + y =0.
b. Réciproquement, montrer que si g_1 est une solution de (E_1), alors g = g_1 + h est une solution de (E).
3. Résoudre l'équation (E_1).
4. Préciser l'ensemble des solutions de l'équation (E).