Fonctions exponentielles - problèmes

➢PROBLEME 1

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x>0$ et $f(0)=0$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{i}\ ,\vec{j})$ (unité graphique 5 cm).

Partie A : 1. Démontrer que la droite (Δ) d'équation y = 1 est asymptote à (C).

2. Pour $x>0$, calculer $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

Étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0 (on pourra utiliser, pour n entier naturel non nul, $\lim\limits_{u\to+\infty} u^n e^{-u}=0$).

Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

3. Démontrer que, pour tout x de] 0 ; + ∞ [, on a : $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$.

4. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau des variations de f.

Partie B : On note g la fonction définie sur]0 ; + ∞[par $g(x)=f(x)-xf'(x)$.

1. Montrer que, dans]0 ; + ∞[, les équations $g(x)=0$ et $x^3+x^2+2x-1=0$ sont équivalentes.

2. Démontrer que l'équation $x^3+x^2+2x-1=0$ admet une seule racine réelle α dont on justifiera un encadrement à 10^{-2} près.

3. On pose $A=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$.

Encadrer A à $(2\times10)^{-1}$ près (justifier) et montrer que $A=f'(\alpha)$.

4. Pour tout $a>0$, on note (T_a) la tangente à (C) au point d'abscisse a.

Montrer que (T_α) a pour équation y = Ax. Tracer (T_α), puis la courbe (C).

5. Déduire des questions précédentes que de toutes les tangentes (T_a) à (C) (en des points d'abscisses non nulles), seule (T_α) passe par l'origine O.

6. On admettra (T_α) est au-dessus de (C) sur] 0 ; + ∞ [.

a) Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$, suivant le réel m donné.

b) Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=mx$ selon le réel m donné.

Partie C

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx$.

Sans calculer explicitement u_n, déterminer le signe de $u_{n+1}-u_n$.

En déduire que la suite (u_n) est croissante.

2. Démontrer que la fonction h, définie sur] 0 ; + ∞ [par : $h(x) = (x+1)\,e^{-\frac{1}{x}}$, est primitive de f sur]0 ; + ∞[.
3. Calculer u_n. Interpréter graphiquement le résultat.
4. Étudier la convergence de la suite (u_n) .

➢PROBLEME 2

Partie A : Soit la fonction g, définie sur R, qui, à tout x, associe : $g(x) = e^x(x - 1) + x^2$.
1. a) Montrer que la dérivée de la fonction g sur R est : $g'(x) = x(e^x + 2)$
b) Déterminer les limites de g en +∞ et -∞.
c) Étudier le signe de g'(x) sur R, et dresser le tableau de variation de g sur R.
2. Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution α et une seule sur l'intervalle [0, +∞[.

Montrer que α est dans l'intervalle $I = \left[\frac{1}{2};1\right]$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur [0, +∞[par : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + x}$.

1. Montrer que les équations f(x) = x et g(x) = 0 sont équivalentes sur [0, +∞[, et que, par suite, l'équation f(x) = x admet α pour solution unique sur I.
2. a) Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur [0, +∞[.
b) Déterminer la limite de f en +∞.
c) Dresser le tableau de variation de f.
d) Construire la courbe représentative (C) de f sur [0, +∞[dans un repère orthonormal (unité 2 cm). On indiquera en particulier les tangentes à (C) aux points d'abscisse 0 et 1.

Partie C
1. Montrer que, pour tout x appartenant à I, f(x) appartient à I.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par : $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_n = f(u_{n-1})$ pour tout n > 1.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*, u_n \in I$.

b) Montrer que, pour tout $x \in I, |f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

c) En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :

pour tout $n > 1, |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$.

d) En déduire, par un raisonnement par récurrence, que : pour tout

$n \in \mathbf{N}^*, |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

e) En déduire que (u_n) converge vers α.
f) À priori, combien suffit-il de calculer de termes de la suite pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-7} près ?
3. En utilisant la décroissance de f, montrez que α est compris entre deux termes consécutifs quelconques de la suite. En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-7}.

PROBLÈME 3

Partie A - Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur R par f (x) = x - 2 + e^{1-x}.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f.

1. a) Étudier le sens de variation de f.

b) Préciser $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. a) Montrer que la droite (D), d'équation y = x - 2, est asymptote à la courbe (C_f).

b) Préciser la position de (C_f) par rapport à (D).

3. Tracer (D) et (C_f).

Partie B - Calcul d'aires

Soit x_0 un nombre réel strictement positif.

1. On considère le domaine limité par la courbe (C_f), son asymptote (D) et les droites d'équations x = 0 et x = x_0.

Exprimer, à l'aide de x_0, l'aire S_1 de ce domaine.

2. On considère la fonction g, définie sur R par g(x) = e^{1-x}, dont on trouvera la courbe représentative (C_g) en annexe. Donner une interprétation, en terme d'aire, de l'intégrale ayant servi au calcul de S_1 à l'aide de la courbe (C_g).

3. A est le point de coordonnées (x_0 ; 0).

B est le point de la courbe (C_g) d'abscisse x_0.

Soit (T) la tangente à la courbe (C_g) au point d'abscisse x_0.

C est le point d'intersection de (T) et de l'axe des abscisses.

Déterminer les coordonnées de C.

4. Calculer (en unités d'aire) l'aire S_2 du triangle ABC.

Vérifier que S_1 + 2 S_2 = 0.

Partie A -Résolution de l'équation différentielle (E) : y' + y = x - 1

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^x e^t(t-1)dt$.

2. a) Soit z une fonction dérivable sur l'ensemble R des nombres réels.

On pose f (x) = z(x)e^{-x}.

Montrer que la fonction f est solution de (E) si, et seulement si, pour tout x de R, z '(x) = e^x (x -1).

b) À l'aide de la première question, déterminer toutes les fonctions z vérifiant, pour tout x de R, z '(x) = e^x (x -1).

3. a) Déduire de la question précédente les solutions de (E).

b) Déterminer la solution de (E) pour laquelle l'image de 1 est 0.

PROBLEME 4

Partie A : Soit la fonction f définie pour tout réel x différent de 1 par : $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{2(1-x)}$.

On appelle Γ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Étudier les limites de f (x) lorsque x tend vers +∞, et lorsque x tend vers 1. Interpréter graphiquement ces résultats.

b) Vérifier que, pour tout x différent de 1, f (x) peut s'écrire : $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{-x}\times\dfrac{x}{2(x-1)}$.

En déduire $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

2. a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{xe^{-x}}{2(1-x)^2}$.
b) Étudier les variations de f.
c) Montrer que f admet un minimum que l'on précisera sur l'intervalle] -∞; 1 [.

Partie B : On considère l'équation différentielle (E) : y'' + 2y' + y = 0
où y est une fonction numérique deux fois dérivable sur R.
1. Résoudre (E).
2. On considère les solutions de (E) dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées
a) Montrer que ces solutions s'écrivent sous la forme : $\left(ax + \frac{1}{2}\right)e^{-x}$.

On note alors $h_a(x) = \left(ax + \frac{1}{2}\right)e^{-x}$ où a est un nombre réel.

b) Faire l'étude du sens de variation de h_a selon les valeurs de a et montrer que, pour tout réel a différent de 0, h_a admet un extremum pour une valeur de x que l'on déterminera en fonction de a.
c) On note C_a la courbe représentative de h_a et S_a le point de C_a correspondant à l'extremum de h_a ; vérifier que, pour tout réel a différent de 0, S_a est un point de Γ, la courbe définie dans la partie A.

Partie D : Dans cette partie, on considère la fonction h_a obtenue pour $a = \frac{1}{4}$.

Soit λ un nombre réel supérieur à -2 ; on appelle D_λ l'ensemble des points du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe $C_{\frac{1}{4}}$ et la droite d'équation x = λ

1. Exprimer $I = \int_{-2}^{\lambda} h_{\frac{1}{4}}(t)dt$ en fonction de λ ; on pourra utiliser une intégration par parties ou se servir de l'équation différentielle (E).
2. Soit A(λ) la mesure en unités d'aire de l'aire D_λ ; quelle est la limite de A(λ) lorsque λ tend vers + ∞ ?

➢PROBLEME 5

Le but du problème est l'étude d'une fonction g_k où k est un réel fixé qui vérifie : 0 < k < e.
Dans la partie A on met en évidence certaines propriétés d'une fonction f qui seront utilisées dans la partie B.

Partie A :
Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur R par : $f(x) = (2 - x)e^x - k$.
1. Déterminer les limites de f en -∞ et en +∞.
2. Calculer f ' (x). En déduire le tableau de variation de f.
Calculer f (1).
3. a) Établir que l'équation f(x) = 0 a deux solutions, une notée α_k appartenant à l'intervalle]- ∞ ; 1[et une autre notée β_k appartenant à l'intervalle]1 ; +∞ [.

b) Montrer que $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$.

On démontrerait de même que β_k vérifie l'égalité : $e^{\beta_k} - k\beta_k = (e^{\beta_k} - k)(\beta_k - 1)$.

4. Préciser le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

Partie B

1. Soit u la fonction de la variable réelle x définie sur R par : $u(x) = e^x - kx$.

a) Étudier le sens de variation de u.

b) On rappelle que $0 < k < e$. Justifier la propriété suivante :
pour tout réel x, $e^x - kx > 0$.

2. Soit g_k la fonction définie sur R par : $g_k(x) = \dfrac{e^x - k}{e^x - kx}$.

On note (C_k) la courbe représentative de la fonction g_k dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

a) Déterminer la limite de g_k en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Prouver que : $g'_k(x) = \dfrac{k.f(x)}{(e^x - kx)^2}$.

c) En déduire le tableau de variation de g_k. Calculer $g_k(1)$.

3. On nomme M_k et N_k les points de la courbe (C_k) d'abscisses respectives α_k et β_k.

a) En utilisant la question 3.b) (Partie A), montrer que : $g_k(\alpha_k) = \dfrac{1}{\alpha_k - 1}$.

b) Donner de même $g_k(\beta_k)$.

c) Déduire de la question précédente que, lorsque k varie, les points M_k et N_k sont sur une courbe fixe (H) dont on donnera une équation.

4. Représentations graphiques pour des valeurs particulières de k.

a) Déterminer la position relative des courbes (C_1) et (C_2).

b) Prouver que $\alpha_2 = 0$.

c) En prenant comme unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées, construire les courbes (C_1), (C_2) et (H) sur le même graphique. (1 point)
On prendra $\alpha_1 = -1,1$; $\beta_1 = 1,8$; $\beta_2 = 1,6$.

➢PROBLEME 6

Les buts du problème sont l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$, puis la recherche de primitives de cette fonction.

Première partie - Étude de fonctions auxiliaires

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par : $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$.

a) On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.

En déduire la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

b) Calculer $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.

c) Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x-1) > 0$, d'inconnue x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.

d) Étudier le sens de variation de g sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$.

e) Montrer que l'équation $g(x)=0$ a une solution unique, notée α, dans l'intervalle $[e+1; e^3+1]$, et étudier le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1;\alpha[$ et $]\alpha\ ;+\infty[$.

2. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $\varphi(x)=\dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)$ et prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$.

b) Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

c) Montrer que φ est croissante sur l'intervalle $]1\ ;\sqrt{\alpha}[$ et décroissante sur l'intervalle $]\sqrt{\alpha}\ ;+\infty[$.

Deuxième partie - Étude de la fonction f

1. Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a $f(x)=\varphi(e^x)$.
2. En déduire :
a) la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 ;
b) la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers + ∞ ;
c) le sens de variation de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.

3. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f(x)\le\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

4. Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de α.

Troisième partie - Recherche de primitives de f

1. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle : $y'+y=\dfrac{e^x}{e^x-1}-\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

2. On pose $h(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}-\dfrac{e^x}{e^x+1}$.
a) Trouver une primitive H de h sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
b) En déduire les primitives F de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

➢ **PROBLÈME 7**

PARTIE A

Soit la fonction φ définie dans R par : $\varphi(x) = e^x + x + 1$.
1. Étudier le sens de variation de φ et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution et une seule α et que l'on a : $-1{,}28 < \alpha < -1{,}27$
3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur R.

PARTIE B

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\vec{j}\ )$ du plan (unité graphique : 4 cm).

1. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{e^x \varphi(x)}{(e^x+1)^2}$.

En déduire le sens de variation de f.

2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

3. Soit T la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

Donner une équation de T et étudier la position de (C) par rapport à T.

4. Chercher les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Démontrer que la droite D d'équation y = x est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à D.

5. Faire le tableau de variation de f.

6. Tracer sur un même dessin (C), T et D. La figure demandée fera apparaître les points de (C) dont les abscisses appartiennent à [-2,4].

PARTIE C

On considère la fonction g, définie sur [0,1] par : $g(x) = \ln(1 + e^x)$.

On note (L) la courbe représentative de g dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, I le point défini par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, A le point d'abscisse 0 de (L) et B son point d'abscisse 1.

1. Étudier brièvement les variations de g.

2. Donner une équation de la tangente en A à (L).

3. On note P l'intersection de cette tangente avec le segment [IB].

Calculer les aires des trapèzes OIPA et OIBA.

4. On admet que la courbe (L) est située entre les segments [AP] et [AB]. Montrer alors que : $\ln 2 + \dfrac{1}{4} \leq \int_0^1 g(x)dx \leq \ln\sqrt{2(1+e)}$.

5. Au moyen d'une intégration par parties, justifier que :

$\int_0^1 f(x)dx = \ln(1+e) - \int_0^1 g(x)dx$.

6. En déduire un encadrement de $\int_0^1 f(x)dx$.

➢PROBLÈME 8

On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1}$.

On note Γ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique 2 cm.

Partie A - Étude et représentation graphique de la fonction f

1. a) Montrer que, pour tout réel x, f (-x) + f (x) = 2.

En déduire que Γ possède un centre de symétrie, qu'on désignera par A et dont on précisera les coordonnées.

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$. (On pourra par exemple utiliser 1. a) ou poser $X = e^x$).

En déduire que Γ possède deux asymptotes dont on précisera les équations.

c) Calculer f' (x) et en déduire le sens de variation de la fonction f.

2. a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe Γ au point d'abscisse 0.

b) On considère la fonction φ définie sur R par $\varphi(x) = f(x) - (x + 1)$.

Montrer que, pour tout réel x, $\varphi'(x) = -\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$.

En déduire le sens de variation de la fonction φ puis son signe (on précisera $\varphi(0)$).
c) Déduire de ce qui précède la position de la courbe Γ par rapport à la droite T.
3. Tracer dans le repère (O; $\vec{i}, \vec{j}$) la droite T ainsi que la courbe Γ et ses asymptotes.

Partie B - Calcul d'aire
1. a) Montrer que f (x) = x si et seulement si φ (x) =-1.
b) En déduire, en utilisant les résultats de A. 2., que la droite D d'équation y = x coupe la courbe Γ en un seul point dont l'abscisse α est comprise entre 2 et 3.

2. a) Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{4e^x}{e^x+1} - 1.$
En déduire une primitive F de f sur R.
b) Exprimer, en fonction de α, l'aire du domaine limité par la courbe Γ, la droite D et les droites d'équations x = 0 et x = α.

Partie C - Approximation du réel α au moyen d'une suite
Dans cette partie, on désigne par I l'intervalle [2 ; 3].
1. a) Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = 4\left(\dfrac{1}{e^x+1} - \dfrac{1}{(e^x+1)^2}\right).$
b) En déduire que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, $|f'(x)| \le \dfrac{1}{2}.$
c) En déduire que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, $|f(x) - f(\alpha)| \le \dfrac{1}{2}|x-\alpha|.$
2. On définit la suite (u_n) d'éléments de l'intervalle I par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour } n \in \mathbf{N} \end{cases}$$
a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \le \dfrac{1}{2^n}|3-\alpha|.$
b) Déterminer un entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
Donner la valeur approchée de u_p proposée par la calculatrice.

➢PROBLÈME 9

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1}.$
On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal; $(O;\vec{i},\vec{j})$ unité graphique : 4 cm.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire
Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.
1. Étudier le sens de variation de g sur [0 ; +∞[et déterminer la limite de g en +∞.
2. a) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution et une seule dans [0 ; +∞[.
On note α cette solution.
b) Prouver que 1,14 < α < 1,15.
3. En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

Partie B - Étude de la fonction f et tracé de la courbe (C)

1. a) Montrer que, pour tout x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{\left(xe^x+1\right)^2}$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. a) Montrer que, pour tout réel positif x, $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$.

b) En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3. a) Établir que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$.

b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la question A.2., donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

5. a) Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;+\infty[$,

$f(x)-x=\dfrac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$ avec $u(x)=e^x-xe^x-1$.

b) Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

En déduire le signe de u(x).

c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

6. Tracer (C) et (T).

Partie C - Calcul d'aire et étude d'une suite

1. Déterminer une primitive F de f sur $[0\ ;+\infty[$; on pourra utiliser l'expression de f(x) établie dans la question B.2.

2. On note D le domaine délimité par la courbe (C), la tangente (T) et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

Calculer, en cm^2, l'aire A du domaine D.

Donner une valeur décimale au mm^2 près de l'aire A.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

a) Calculer v_0, v_1 et v_2.

On donnera des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de v_0, v_1 et v_2.

b) Interpréter graphiquement v_n.)

c) Montrer que, pour tout $n\geq 2, f(n+1)\leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$.

En déduire la monotonie de la suite (v_n) à partir de n = 1.

d) Déterminer la limite de la suite (v_n).

➢PROBLÈME 10

Soit la fonction numérique f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x^2}$.

Partie A - Étude de la fonction f

On considère la fonction h définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = xe^x - 2e^x + 2$.

1. Déterminer les variations de h (on précisera h(0) mais la limite en $+\infty$ n'est pas demandée).

2. Déterminer le signe de $h\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

En déduire qu'il existe un unique réel a appartenant à l'intervalle $\left[\frac{3}{2};2\right]$ tel que

h(a) = 0.
En déduire le signe de h sur [0 ; + ∞[.
3. Étude de la fonction f
a) Calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle]0 ; + ∞[.
b) Montrer que, pour tout nombre x strictement positif : $f'(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 2}{x^3}$.
En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
c) Montrer que $f(a) = \frac{-1}{a(a-2)}$ et en déduire le signe de f(a).

Partie B - Recherche d'un encadrement du nombre a
1. Démontrer que, sur [0 ; + ∞[, l'équation h(x) = 0 équivaut à $2(1 - e^{-x}) = x$.
2. Soit la fonction g définie sur [0 ; + ∞[par $g(x) = 2(1 - e^{-x})$.
On pose $I = \left[\frac{3}{2};2\right]$. Montrer que, pour tout x de l'intervalle I, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
3. Soit la suite $(x_n)_{n > 1}$ définie par

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases} \quad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, x_n appartient à I.
a) Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $|x_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|x_n - a|$ et

$|x_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$.
En déduire que la suite (x_n) converge vers a.
b) Déterminer un entier p tel que x_p soit une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel a.
Donner une valeur approchée de x_p avec trois décimales.

Partie C- Quelques propriétés d'une primitive de f
On appelle F la primitive de f sur]0 ; + ∞[qui s'annule en 1.
Ainsi l'on a, pour tout réel x de]0 ; + ∞[, $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.
1. Étudier le sens de variation de F sur]0 ; + ∞[.
2. Démontrer que, pour tout x supérieur ou égal à 2, $\int_2^x f(2)dt \leq \int_2^x f(t)dt$.
Par comparaison de limites, et en utilisant la relation de Chasles, en déduire $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

➢ PROBLEME 11

Partie A - Étude d'une fonction f et courbe représentative
On appelle f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par : $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1. a) f ' et f '' désignant respectivement les dérivées première et seconde de f, calculer, pour tout réel x, f'(x) et f''(x).
b) Étudier le sens de variation de la dérivée f '.
c) Démontrer que, pour tout réel x positif, f ' (x) > 0.
d) Calculer la limite de f en +∞.
e) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
2. a) Démontrer que la droite (D) d'équation y = x + 1 est asymptote à (C) et préciser la position relative de (D) et (C).
b) La courbe (C) admet en un point A une tangente parallèle à la droite (D).
Déterminer les coordonnées de A.
3. Démontrer que l'équation f(x) = 2 admet sur [0 ; +∞ [une unique solution notée α, puis vérifier que $0 < \alpha < 1$.
4. a) Construire la droite (D), le point A défini au 2.b), la courbe (C) et la tangente en A à la courbe (C).
b) Donner par lecture graphique une valeur approchée de α.

Partie B - Recherche d'une approximation décimale de α

1. Démontrer que, sur [0 ; +∞[, l'équation f(x) = 2 équivaut à l'équation :
$\dfrac{e^x}{e^x+1} = x$.2. On appelle h la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :h(x) = $\dfrac{e^x}{e^x+1}$.
a) Calculer h'(x) pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] et réaliser le tableau de variation de la fonction h.
b) En déduire que, pour tout réel x de [0 ; 1], h(x) appartient à [0 ; 1].
c) Calculer h''(x) pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] ; étudier le sens de variation de h'.
d) En déduire que, pour tout réel x de [0 ; 1], $0 \le h'(x) \le \dfrac{1}{4}$.

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par: $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout entier naturel n.
a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle [0 ; 1].
b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-\alpha| \le \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$
c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \le \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers α.
d) Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée à 10^{-6} près de α et, à l'aide de la calculatrice, proposer une approximation décimale de u_p à 10^{-6} près. Que peut-on en déduire pour α ?

Partie C - Résolution d'une équation différentielle

1. Déterminer les fonctions définies sur R solutions de l'équation différentielle (E_1) : y'' + 2y' + y = 0.
2. On considère l'équation différentielle (E_2) : y'' + 2y' + y = x + 3.
a) Vérifier que la fonction p définie sur R par p(x) = x + 1 est solution de (E_2).
b) Démontrer qu'une fonction g est solution de (E_2) si, et seulement si, la fonction g- p est solution de (E_1). c) Déduire de 1. et de 2.b) toutes les solutions de (E_2).
d) Déterminer la solution de (E_2) qui vérifie : g(0) = 1 et g'(0) = 2.

➢PROBLÈME 12

Partie A

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = x - e^{2x-2}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra 5 cm comme unité.

1. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Vérifier que, pour tout réel x non nul : $f(x) = x\left[1 - 2e^{-2} \times \left(\frac{e^{2x}}{2x}\right)\right]$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer f'. Étudier le signe de $f'(x)$ et calculer la valeur exacte du maximum de f.

3. Démontrer que la droite (D) d'équation y = x est asymptote à la courbe (C). Étudier la position relative de (C) et (D).

4. On note A le point de la courbe (C) d'abscisse 1.

Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (C).

5. a) On note I l'intervalle [0 ; 0,5].

Démontrer que l'équation f (x) = 0 admet dans l'intervalle I une unique solution qu'on notera a.

b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de α.

6. Construire la courbe (C), l'asymptote (D) et la tangente (T).

Partie B : Détermination d'une valeur approchée de a

On définit dans R la suite (u_n) par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = e^{2u_n - 2}$

1. Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = e^{2x-2}$.

Démontrer que l'équation f (x) = 0 est équivalente à g(x) = x.

En déduire g(a).

2. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, on a : $|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$.

3. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, g(x) appartient à I.

4. Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que, pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - a| \leq \frac{2}{e}|u_n - a|$.

5. Démontrer, par récurrence, que : $|u_n - a| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$.

6. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

7. Déterminer un entier naturel p tel que : $|u_p - a| < 10^{-5}$.