FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

1. Définition

Le fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est définie et continue sur $]0;+\infty[$, donc elle admet des primitives sur cet intervalle. Parmi ces primitives, il existe une et une seule qui s'annule en 1.

La primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée fonction logarithme népérien. On la note ln (ou Log).

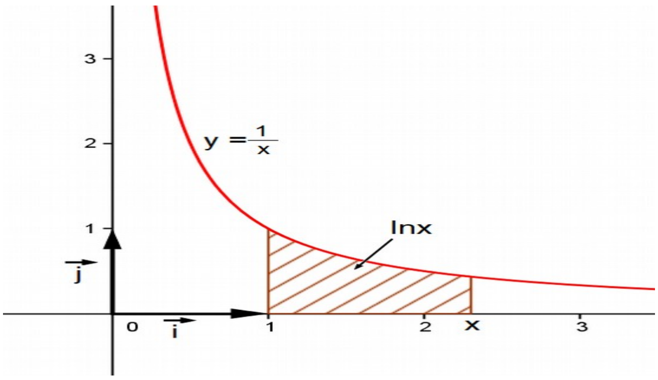
Donc si f(x) = ln x, alors

- Df = $]0;+\infty[$
- $f'(x)=\ln' x=\frac{1}{x}$
- f(1)= ln 1 =0

Comme ln est la primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1, alors $\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

Interprétation graphique

Le réel ln x est, en unité d'aire, l'aire géométrique du domaine plan situé entre la courbe de $x \longmapsto \frac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'abscisses 1 et x.



2. Sens de variation

Pour tout x > 0, $\frac{1}{x}>0$, donc ln' x > 0. Alors la fonction ln est strictement croissante sur son domaine de définition $]0;+\infty[$.

Conséquences :

Pour tous réels strictement positifs a et b,

- ln a = ln b si et seulement si a = b
- ln a > ln b si et seulement si a > b
- ln a > 0 si et seulement si a > 1
- ln a < 0 si et seulement si 0 < a < 1

3. Propriétés algébriques

Théorème

- Pour tous réels a et b strictement positifs, ln a.b =ln a + ln b
- Plus généralement pour tous réels non nuls a et b, ln a.b = ln |a| + ln |b|
- Pour tout réel a non nul, $\ln\frac{1}{a}=-\ln a$
- Pour tous réels a et b strictement positifs $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$

Démonstrations

- Considérons les fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par f(x) = ln x et g(x)= ln (a x) , où a est un réel strictement positif.

On a respectivement $f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g'(x)=\frac{a}{ax}=\frac{1}{x}$.

Ainsi, f'(x) = g'(x), donc f et g sont des primitives de la fonction $x\longmapsto\frac{1}{x}$.

D'après une propriété des intégrales, f et g diffèrent d'une constante : il existe une constante réelle k telle que g(x) = f(x)+ k .

En particulier g(1) = f(1) + k.

Comme f(1) = ln 1 = 0, et g(1) = ln a , on a k = ln a.

D'où ln(ax) = ln x + ln a .

- $\ln\frac{a}{a}=\ln(a.\frac{1}{a})=\ln a+\ln\frac{1}{a}$

Or $\ln\frac{a}{a}=\ln 1=0$, d'où $\ln\frac{1}{a}=-\ln a$

- $\ln\frac{a}{b}=\ln(a.\frac{1}{b})=\ln a+\ln\frac{1}{b}=\ln a-\ln b$

  Ainsi $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$

Théorème

Pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n, on a $\ln(a^n)=n.\ln a$

Pour tout réel a strictement positif et tout rationnel r, on a $\ln(a^r)=r.\ln a$

En particulier, $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}.\ln a$

Démonstrations

- Soit a > 0. Démontrons par récurrence que $\ln(a^n)=n.\ln a$ quel que soit l'entier naturel n.

Pour n = 0, $\ln(a^0)=\ln 1=0$, et 0. ln a =0.

Donc l'égalité est vérifiée à l'ordre 0.

Supposons que l'égalité soit vraie à l'ordre n, c'est à dire $\ln(a^n)=n.\ln a$.

Montrons qu'elle est encore vraie à l'ordre n+1, c'est à dire $\ln(a^{n+1})=(n+1).\ln a$

$\ln(a^{n+1})=\ln(a^n\cdot a)=\ln(a^n)+\ln a$

Par hypothèse de récurrence $\ln(a^n)=n.\ln a$, ainsi $\ln(a^{n+1})=\ln(a^n\cdot a)=n.\ln a+\ln a$

Alors $\ln(a^{n+1})=(n+1).\ln a$.

- Soit n un entier négatif. On a m = -n > 0.

$$\ln(a^n)=\ln(a^{-m})=\ln\left(\frac{1}{a^m}\right)=\ln\left(\frac{1}{a}\right)^m$$

Comme m > 0, $\ln\left(\frac{1}{a}\right)^m=m.\ln\left(\frac{1}{a}\right)=m(-\ln a)=-m.\ln a$

$$\ln a^n=\ln\left(\frac{1}{a}\right)^m=-m.\ln a=n.\ln a$$

D'où pour n < 0, $\ln(a^n)=n.\ln a$

Ainsi, quel que soit l'entier relatif n, $\ln(a^n)=n.\ln a$.

- Soit q un entier naturel strictement positif, on a $\ln(a)=\ln(a^{(\frac{1}{q})q})$

Or, d'après le résultat précédent, $\ln a=\ln(a^{(\frac{1}{q})q})=q\ln(a^{\frac{1}{q}})$.

Ce qui donne $\ln(a^{\frac{1}{q}})=\frac{1}{q}\ln a$.

Considérons alors un entier relatif p. On a $\ln(a^{\frac{p}{q}})=\ln(a^{(\frac{1}{q})p})=p.\ln(a^{\frac{1}{q}})$

Ce qui donne $\ln(a^{\frac{p}{q}})=p.\frac{1}{q}\ln(a^{\frac{1}{q}})$ .D'où $\ln(a^{\frac{p}{q}})=\frac{p}{q}\ln(a^{\frac{1}{q}})$

Cas particulier

Pour a > 0, $\ln(a)=\ln(\sqrt{a})^2=2\ln\sqrt{a}$, d'où $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$

4. Étude des variations de la fonction ln

Soit f(x) = ln x.

- Df = $]0;+\infty[$
- ***Limites***

➢ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$

Nous avons à montrer que pour les grandes valeurs de x, les réels ln x finissent par dépasser tout réel M fixé, aussi grand soit-il.

Soit M un réel. Montrons que pour tout réel x assez grand, on a ln x > M.

On a pour tout entier n et pour tout x > 0, si $x>2^n$ alors $x>2^n$, donc $\ln x>n.\ln 2$.

Pour avoir ln x > M, il suffit d'avoir de prendre $x>2^{\frac{M}{\ln 2}}$.

En effet, du fait que la fonction ln est croissante, si $x>2^{\frac{M}{\ln 2}}$, on a $\ln x>\ln 2^{\frac{M}{\ln 2}}$

$\ln x>\frac{M}{\ln 2}\ln 2$, ou ln x > M.

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$

➢ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$

Posons $x=\frac{1}{z}$. On a, $x \longrightarrow 0^+$ si et seulement si $z \longrightarrow +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{z\to+\infty} \ln\frac{1}{z}=\lim\limits_{z\to+\infty} -\ln z=-\infty$

Dérivabilité et dérivée

La fonction ln est une primitive d'une fonction, donc elle est dérivable. Sa dérivée est $f'(x)=\ln' x=\frac{1}{x}$.

Limites classiques

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln x=0$

Démonstrations

- Soit f (x) = ln x.

f est dérivable et $f'(x)=\ln' x=\frac{1}{x}$, donc $f'(1)=1$.

Or, par définition, $f'(x)=\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}=\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

D'où $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

- Pour t > 1, $1 < \sqrt{t} < t$.

En prenant les inverses, $\frac{1}{t} < \frac{\sqrt{t}}{t}$

En intégrant, pour x >1 , on a $\int_1^x \frac{1}{t} dt < \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt$.

Ce qui donne $\ln x - \ln 1 < 2\sqrt{x} - 2\sqrt{1}$,et $\ln x < 2\sqrt{x} - 2\sqrt{1} < \sqrt{2}$

Puisque x > 1, ln x > 0.

En divisant par le même nombre réel x > 1, on a $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{2}}{x}$

Comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2}}{x} = 0$, on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

- Posons $x = \frac{1}{z}$ donc $z = \frac{1}{u}$. $x \longrightarrow 0^+$ si et seulement si $z \longrightarrow +\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} x.\ln x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{z}.\ln \frac{1}{z} = -\lim_{z \to +\infty} \frac{\ln z}{z} = 0$$

5. Dérivée et primitives

Soit u une fonction strictement positive et dérivable, et f la fonction définie par f(x)= ln [u(x)].

Ensemble de définition

f(x) = ln[u(x)] est défini pour tout réel x tel que u(x) est défini et u(x) >0

Dérivabilité et dérivée

On a f(x)= (ln o u)(x).

ln et u sont dérivables, donc f est dérivable, et d'après la formule de dérivation d'une fonction composée, $f'(x) = u'(x).\ln'(u(x))$

$\ln' x = \frac{1}{x}$, donc $\ln' u(x) = \frac{1}{u(x)}$.

Alors $\ln' u(x) = \frac{1}{u(x)}$

D'où , si f(x)= ln [u(x)], alors $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Nouvelles primitives

Considérons la fonction g définie par g (x)= ln |u(x)|.

Si u(x) > 0, alors g(x)= ln [u(x)], et $g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Si u(x) < 0, alors g(x)= ln [-u(x)], et $g'(x) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Donc g est la primitive de la fonction définie par $\frac{u'(x)}{u(x)}$.

- Ainsi, si $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ alors les primitives de f sont les fonction F définies par F (x)= ln |u(x)| + K, avec K réel.

En particulier,

- si $f(x)=\frac{1}{x}$ alors les primitives de f sont les fonction F définies par F (x)= ln| x| + K, avec K réel.
- si $f(x)=\frac{1}{ax+b}$ alors les primitives de f sont les fonction F définies par $F(x)=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+K$, avec K réel.

6. Résolution d'une équation et d'une inéquation avec ln

Le nombre e

La fonction ln est strictement croissantes sur $]0;+\infty[$, c'est donc une bijection de $]0;+\infty[$ sur IR.

Pour tout réel m, l'équation ln x = m admet donc une solution unique dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

En particulier, il existe un unique réel dont le logarithme népérien est 1. Ce réel est noté e. Ainsi ln e =1.

e est une nombre irrationnel, $e\approx 2{,}71828..$.

Résolution de l'équation ln x = m

$\ln x=m=m.1=m.\ln e=\ln e^m$

ce qui donne $x=e^m$

Donc, dire que ln x = m équivaut à dire que $x=e^m$

Résolution d'une inéquation ln x > m

$\ln x>m$ équivaut à $\ln x>\ln e^m$
ce qui donne $x>e^m$

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $S=]e^m,+\infty[$

Résolution d'une inéquation ln x < m

équivaut à $\ln x<\ln e^m$
ce qui donne $x<e^m$

Comme x doit être strictement supérieur à 0 pour que ln x soit définie, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $S=]0,e^m[$