Calcul intégral

1. Définition

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et a et b deux éléments de I, et soit F une primitive de f sur I.

On appelle intégrale de a à b de f le nombre noté $\int_a^b f(x)dx$ ou $[F(x)]_a^b$ défini par $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

$\int_a^b f(x)dx$ se lit aussi somme de a à b de f(x)dx.

La notation $[F(x)]_a^b$ permet de noter l'intégrale si on connaît la primitive de f.

Ce nombre ne dépend pas de la primitive choisie. En effet, si G est une autre primitive de f sur I, alors il existe un réel k tel que G(x)= F(x) + k.

Et G(b) – G(a) = F(b)+k -F(a) -k = F(b) – F(a) = $\int_a^b f(x)dx$

Ce qui fait que dans les calculs, on ne tient pas compte de la constante d'intégration k.

Remarque

Dans le calcul, la variable x qui apparaît dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ est remplacée par a et b, donc on peut écrire indifféremment $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f(\theta)d\theta$ pour désigner le même nombre.

Ainsi $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta$

On dit que x est une variable muette.

2. Propriétés

- $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a)$

Donc $\int_a^a f(x)dx = 0$

- $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a))$

Donc $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

- $\int_a^b 0.dx = [F(b) - F(a)] = k - k$ puisque F(x)=k, où k est une constante réelle, est une primitive de la fonction nulle

Donc $\int_a^b 0.dx = 0$

- $\int_a^b 1.dx = [x]_a^b$

Donc $\int_a^b 1.dx = b - a$

- ***Relation de Chasles***

Si a, b et c sont des éléments de l'intervalle I sur lequel f est continue, alors $F(c)-F(a)=F(c)-F(b)+F(b)-F(a)=\int_b^c f(x)dx+\int_a^b f(x)dx$

Ainsi $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$

- Soient F et G les primitives respectives des fonctions f et g sur le même intervalle I contenant a et b. Alors F+G est une primitive de f+g.

Alors $\int_a^b (f+g)(x)dx=(F+G)(b)-(F+G)(a)$

Comme $(F+G)(b)-(F+G)(a)=F(b)+G(b)-F(a)-G(a)=[F(b)-F(a)]+[G(b)-G(a)]$, on a :

$$\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

- Soit F une primitive de f sur l'intervalle I contenant a et b et soit k un nombre réel. Alors k.F est une primitive de k.f sur I et

$\int_a^b (k.f)(x)dx=(k.F)(b)-(k.F)(a)=k[F(b)-F(a)]$

Ainsi

$$\int_a^b (k.f)(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$

- Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a;b]. Elle admet donc une primitive F sur cet intervalle.

On a alors F '(x) = f(x) pour tout x de [a;b]. Donc F est croissante sur cet intervalle.

Comme $a\le b$, $F(a)\le F(b)$, et $F(b)-F(a)\ge 0$

Ainsi

Si $f(x)\ge 0$ pour tout x de [a;b], alors $\int_a^b f(x)dx\ge 0$

Conséquence

Si $f(x)\ge g(x)$ pour tout x de [a;b], alors $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$

En effet, si $f(x)\ge g(x)$ pour tout x de [a;b], alors $f(x)-g(x)\ge 0$ pour tout x de [a;b].

Il suffit alors d'appliquer le résultat précédent pour avoir $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\ge 0$,

d'où $\int_a^b (f-g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx\ge 0$, qui donne finalement $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$

Valeur moyenne d'une fonction- inégalité de la moyenne

Valeur moyenne

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle [a ; b].

La valeur moyenne de f sur [a ; b]. est le nombre μ défini par $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Inégalités de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I

S'il existe deux réels m et M tels que pour tout x de I, $m \leq f(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

S'il existe un réel M tels que pour tout x I, $|f(x)| \leq M$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$

Démonstrations

- Supposons $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x de I.

En intégrant entre a et b chaque membre, on a $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

- Supposons $|f(x)| \leq M$ pour tout x de I, ce qui équivaut à $-M \leq f(x) \leq M$.

En appliquant le résultat précédent, on a $-M(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$, qui équivaut à

$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$

3. Intégrale et primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I.

Posons $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

F(x) = G(x)-G(a) où G est une primitive quelconque de f sur I.
G est dérivable sur I puisqu'elle est une primitive de f. Donc F aussi est dérivable sur I et F'(x)=G'(x) – 0
(G(a) est une constante réelle donc sa dérivée est 0)
Puisque G est une primitive de f, G'(x)= f(x).
Alors F'(x) = f(x). Par conséquent F est aussi une primitive de f sur I.

De plus, $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$

donc F est la primitive de f qui s'annule en a.

Théorème

La fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Extension

Soit f une fonction continue sur I et u une fonction dérivable telle que u(x) appartient à I, et soit F la fonction définie par $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)dt$

On a F(x) = G(u(x))-G(a) où G est une primitive de f sur I
F(x) = Gou (x)-G(a).
G et u sont dérivables, donc Gou est aussi dérivable.
F'(x) = u'(x). G'(u(x))-0
Comme G'(x)= f(x), F'(x) = u'(x).f [u(x)]

Ainsi, si $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)dt$, alors F'(x) = u'(x).f [u(x)].

Exemple

Soit $F(x) = \int_0^{2x^2} \sin t.dt$

$u(x)=2x^2$, u'(x) = 4x.

$F'(x)=4x.\ \sin(2x^2)$