Notion sur la loi normale

Dans les chapitres précédents, on a travaillé avec des lois de probabilités définies sur des ensembles finis, donc dont on peut compter les éléments. Dans ce chapitre, on va travailler dans un ensemble continus : des intervalles de IR.

1. Loi de probabilité continue

1.1 Définition

Soit I un intervalle de IR.

On appelle loi de probabilité **sur l'intervalle I** une fonction définie, continue et positive sur I, telle que

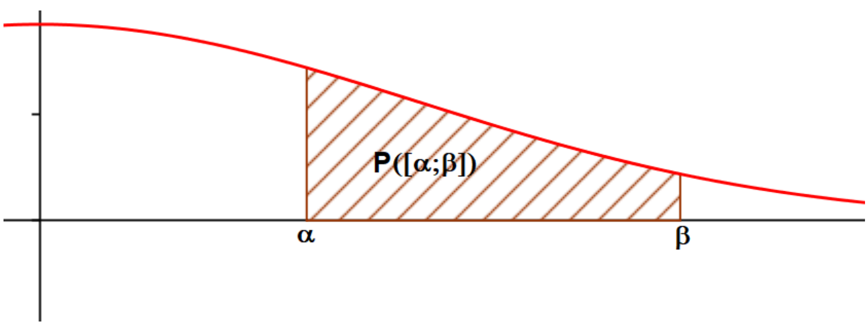
- si **I = [a, b]** $\int_a^b f(x)dx=1$.
- si l'intervalle $I=[a;+\infty[$, $\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx=1$.

On dit que f est une densité de probabilité.

Pour tout intervalle $[\alpha;\beta]$ inclus dans I, la probabilité de $[\alpha;\beta]$ est $P([\alpha;\beta])=\int_\alpha^\beta f(x)dx$

Remarque :

$P([\alpha;\beta])=\int_\alpha^\beta f(x)dx$ est l'aire du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et le droites d'équations $x=\alpha$ et $x=\beta$.



1.2 Propriétés

Pour un nombre x_0 appartenant à I = [a, b], $P(x_0)=\int_{x_0}^{x_0} f(x)dx=0$.

Ce qui entraîne $P([\alpha;\beta])=P(]\alpha;\beta[)$.

Si $A\cup B=I$ et $A\cap B=\emptyset$, alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=1$

$P(A)=1-P(B)$

Ainsi dans le cas où $I=[a;+\infty[$, pour tout c appartenant $I=[a;+\infty[$, $P([c;+\infty[)=1-\int_a^c f(x)dx$

1.3 Espérance mathématique et variance

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit la loi de probabilité de densité f définie sur un intervalle [a ; b] est $E(X)=\int_a^b x.f(x)dx$

La variance de X est $V(X)=E[(X-E(x))^2]$.

1.4 Exemples

Loi uniforme

Une loi uniforme sur I= [a ; b] est une loi de probabilité dont la densité est une fonction constante sur I.

La loi uniforme sur I= [0 ; 1] est la loi de probabilité dont la densité est la fonction définie sur I par f(x) = 1.

On montre aisément que dans ce cas, pour tout intervalle [c ; d] de [0 ; 1], $P([c;d])=d-c$

Loi exponentielle

La loi exponentielle de paramètre λ sur $I=[0;+\infty[$ est la loi de probabilité dont la densité est la fonction définie sur $I=[0;+\infty[$ par $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, où λ est un nombre réel strictement positif.

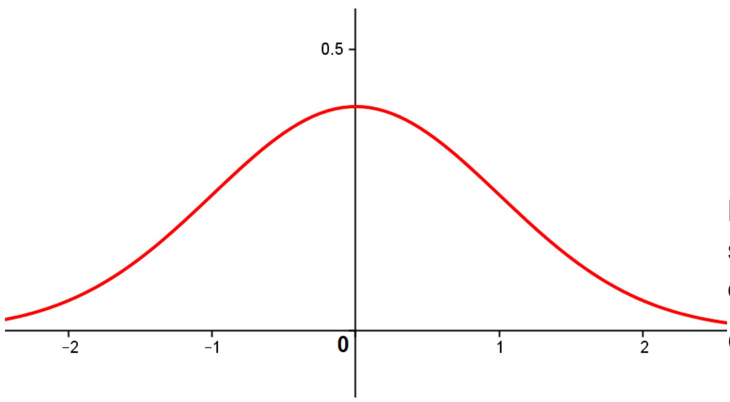
Pour tout intervalle [c ; d] de $I=[0;+\infty[$, $P([c;d])=\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}$.

On a $P([0;+\infty[)=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx=\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda 0}-e^{-\lambda t}=1$.

2. Loi normale centrée réduite

2.1 Définition

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0;1)$ si elle admet pour densité la fonction définie sur IR par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$.



Courbe de f

(appelée courbe de Gauss, ou courbe en cloche)

La fonction étant paire, la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On admet que $P(\mathbb{R})=\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=1$

On a donc $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)dx=\frac{1}{2}$ .et $P([0;+\infty[)=P(]\infty;0])=\frac{1}{2}$

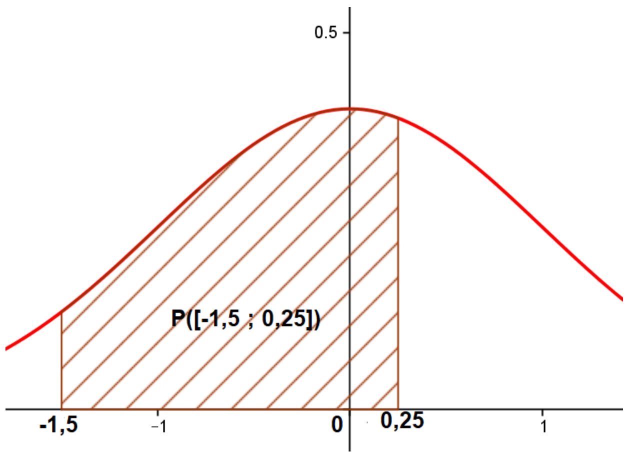
Remarque

- On ne peut pas trouver de primitive de la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Les valeurs prises par une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ ne peuvent se calculer qu'avec une table, une calculatrice ou un logiciel de mathématiques.
- On montrer que si une variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors son espérance mathématique est 0 et la variance est 1. C'est pourquoi on note $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

E(X)= 0 et V(X)=1.

Dans le cas général, si l'espérance est μ et l'écart-type σ, on note $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Exemple



$$P([-1,5;0,25])=\int_{-1,5}^{0,25}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0,532$$